

DLR-IB-FA-BS-2018-72

**Entwicklung eines
Vorauslegungstools für
Flügelstrukturen aus
Faserverbundwerkstoffen**

Bachelorarbeit

Daniel Hardt, Edgar Werthen



DLR

**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt**

Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik

DLR-IB-FA-BS-2018-72

Entwicklung eines Vorauslegungstools

für Flügelstrukturen aus

Faserverbundwerkstoffen

Zugänglichkeit:


Stufe 2 (intern und extern beschränkt zugänglich)

Braunschweig, 05. 2018

Der Bericht umfasst: 112 Seiten

Institutsleiter:

Autoren: Daniel Hardt


Prof. Dr.-Ing. M. Wiedemann


Betreuer: Edgar Werthen



Abteilungsleiter:


Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne



DLR

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt

Fachbereich

Luft- und Raumfahrttechnik

Bachelorarbeit

Entwicklung eines Vorauslegungstools für Flügelstrukturen aus Faserverbundwerk- stoffen

Vorgelegt von:	Daniel Hardt
Matrikel-Nr.:	3046544
Abgabedatum:	23.02.2018
Referent:	Prof. Dr.-Ing. Carsten Braun FH Aachen
Externer Betreuer:	M.Eng. Edgar Werthen Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.



Kurzreferat / Abstract

Kurzreferat

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Python-Moduls zur Berechnung von dünnwandigen mehrzelligen geschlossenen Querschnitten aus Faserverbund-Materialien. Dieses Modul soll in das Vorauslegungstool PreDoCS integriert werden und für eine multidisziplinäre Entwurfsoptimierung (MDO) eingesetzt werden können. Ein Schwerpunkt des Moduls liegt auf der Berechnung der elastischen Kopplungen, wie z.B. der Biege-Torsions-Kopplung, da somit Aspekte des Aeroelastic Tailorings im Vorentwurf berücksichtigt werden können. Zusätzlich sollen die Beanspruchungen der Querschnittskontur berechnet werden, mit denen eine Festigkeits- und Stabilitätsanalyse durchgeführt werden kann.

Es wurde eine Recherche zu bestehenden Modellen zur Querschnittsberechnung von Flügelstrukturen aus Faserverbund-Materialien durchgeführt. Für das zu entwickelnde Modul wurde ein analytischer Ansatz gewählt und auf beliebige mehrzellige Querschnitte erweitert. Mit diesem Ansatz ist es möglich, eine 6x6-Steifigkeitsmatrix zu ermitteln, die die Steifigkeiten für Querkraftschub in zwei Richtungen, Längsdehnung, Biegung um zwei Achsen und Torsion, sowie alle Koppelsteifigkeiten dieser Freiheitsgrade beinhaltet.

Der gewählte Ansatz wurde implementiert und mit dem 2D-FE-Tool BECAS, sowie mit dem bestehenden PreDoCS Querschnitts-Modul anhand von Testquerschnitten validiert. Zusätzlich wurde der Einfluss des Faserwinkels und der Elementgröße auf die Steifigkeiten untersucht. Bei der Berechnung der Schubsteifigkeiten kommt es aufgrund der verwendeten Schubtheorie erster Ordnung zu Abweichungen. Die Übereinstimmung aller anderen Ergebnisse ist sehr gut. Aufgrund des analytischen Berechnungsansatzes ist die Rechenzeit sehr gering und es ist mit einem gewöhnlichen PC möglich, einen Querschnitt unter 100 Lastfällen in unter 1 sec zu berechnen.

Abstract

The aim of this work is the development of a Python-module for the calculation of thin-walled multicell closed cross sections made of composite material. The module should be integrated into the preliminary design tool PreDoCS and used for multi-disciplinary design optimization (MDO). The focus of the modul is on the computation of the elastic-couplings, e.g. bending-torsion-coupling, which allows to take aspects of aeroelastic tailoring into account in preliminary design. Further, the stress along the cross section contour should be calculated, which is used for strength and stability analysis.

A review was carried out on existing models for cross section analysis of composite wing structures. Based on the requirements, an analytical approach was chosen and exteded for arbitrary multicell closed cross sections. With this approach, it is possible to determine a 6x6 stiffness matrix that includes the stiffnesses for shear in two directions, extension, bending about two axes and torsion, as well as all coupling terms.

The chosen approach was implemented and validated with test cross sections using the 2D-FE-tool BECAS and the existing PreDoCS cross section module. In addition, the influence of fibre angle and element size on the stiffness was studied. A deviation occur for shear stiffness due to the first-order shear deformation theory (FSDT) used. The accuracy of all other results is very good. Due to the analytical approach, the developed module is very fast and it is possible to calculate a cross section under 100 load cases in less than 1 sec with a standard PC.

Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die im Quellenverzeichnis angegebenen Quellen benutzt habe. Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder noch nicht veröffentlichten Quellen entnommen sind, sind als solche kenntlich gemacht. Die Zeichnungen oder Abbildungen in dieser Arbeit sind von mir selbst erstellt worden oder mit einem entsprechenden Quellennachweis versehen. Diese Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keiner anderen Prüfungsbehörde eingereicht worden.

Stade, im Februar 2018

Daniel Hardt

Geheimhaltung

Die vorliegende Arbeit unterliegt der Geheimhaltung. Sie darf weder vollständig noch auszugsweise ohne schriftliche Genehmigung des DLR vervielfältigt, veröffentlicht oder Dritten zugänglich gemacht werden.

Inhaltsverzeichnis

Kurzreferat/Abstract	I
Eigenständigkeitserklärung	III
Geheimhaltung	V
Inhaltsverzeichnis	VIII
Abbildungsverzeichnis	IX
Tabellenverzeichnis	XI
Abkürzungsverzeichnis	XIII
Symbolverzeichnis	XIV
Bibliographische Angaben	XVII
1. Einleitung	1
1.1. Motivation und Problemstellung	4
1.2. Anforderungen an das Querschnittsmodul	5
2. Stand der Technik zur Querschnittsberechnung	7
2.1. Vergleich bestehender Ansätze	9
2.2. Auswahl eines Ansatzes	12
3. Theoretische Aufarbeitung des verwendeten Ansatzes zur Querschnittsberechnung	13
3.1. Ansatz nach Song [34]	14
3.1.1. Kinematik	14
3.1.2. Materialverhalten	18
3.1.3. Herleitung der Querschnittssteifigkeit	25
3.1.4. Lokale Dehnungen und Spannungen in der Kontur	27
3.2. Erweiterung des Ansatzes nach Song für beliebige mehrzellige Querschnitte	27
3.3. Berechnung des elastischen Schwerpunkts	32
3.4. Berechnung der Biege-Hauptachsen	33

3.5. Berechnung der Querkraft-Hauptachsen	34
3.6. Berechnung des Schubmittelpunkts	34
4. Aufbau der Software	36
4.1. Struktur und Ablauf der Berechnungen	36
4.2. Elementierung der Querschnittskontur	40
4.2.1. Ablauf der Elementierung	40
5. Validierung	43
5.1. Tools zur Validierung	46
5.1.1. Bestehendes PreDoCS-Querschnitts-Modul	46
5.1.2. BECAS	47
5.2. Vergleich anhand von Querschnitten aus isotropem Material	48
5.3. Vergleich anhand von Querschnitten aus Faserverbund-Material	53
5.4. Einfluss des Faserwinkels auf die Querschnittssteifigkeit	54
5.5. Einfluss der Elementlänge auf die Querschnittssteifigkeit	56
6. Diskussion der Ergebnisse	58
6.1. Genauigkeit	58
6.1.1. Korrektur der Schubsteifigkeiten	59
6.1.2. Einfluss des Faserwinkels	60
6.1.3. Einfluss der Elementlänge	62
6.2. Rechenzeit	62
7. Zusammenfassung und Ausblick	64
Anhang	A1
A. Material-Steifigkeitskoeffizienten	A1
B. Querschnitts-Steifigkeitskoeffizienten	A3
C. Materialdaten	A4
D. Qualitative Bewertungskriterien zur Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse	A5
E. Vergleich anhand von Querschnitten aus isotropem Material	A7
F. Vergleich anhand von Querschnitten aus Faserverbund-Material	A11
G. Variation des Faserwinkels	A19
H. Variation der Elementlänge	A21

Abbildungsverzeichnis

1.1. Detailgenauigkeit eines Holms in den unterschiedlichen Phasen der Entwicklung eines Flugzeuges [2]	2
1.2. Verschiedene Flügelquerschnitte [3]	3
1.3. Biege-Torsions-Kopplung eines Balkens aus Faserverbund-Material . . .	3
1.4. Verformung eines vorwärts gepfeilten Flügels unter aerodynamischer Belastung [6]	4
1.5. Ebenen des Vorauslegungstools PreDoCS	5
2.1. Balken: eine Längendimension ist größer als die anderen beiden	7
2.2. Ablauf der Balken-Berechnung nach Hodges [9]	8
2.3. Modellierung eines Rotorblatts mit Balkenelementen [19]	9
3.1. Querschnitt-Koordinatensysteme	15
3.2. Verschiebungsfeld des Balkens [34]	16
3.3. Einfluss der Querkraft: a) nichtlinearer Verlauf von Schubspannung und Scherung, b) tatsächliche Verwölbung des Querschnitts, c) Näherung für Schubspannung und Scherung nach Timoschenko [40]	17
3.4. Geometrie eines Laminats mit N Schichten	18
3.5. Spannungen in einer Laminatschicht	19
3.6. Schicht- und Laminat- bzw. Kontur-Koordinatensystem mit Rotationswinkel Θ [34]	20
3.7. Schnittkraftflüsse und Schnittmomentenflüsse [8]	23
3.8. Schnittlasten mit Angriffspunkten an einem Querschnitt	27
3.9. Mehrzellige Flügelquerschnitte	28
3.10. Umlaufender Schubfluss pro Zelle aus Torsion	28
3.11. Schubflüsse in der Kontur	30
3.12. Vorzeichendefinition der Schubflüsse	30
3.13. Elastischer Schwerpunkt und Biege-Hauptachsen	33
3.14. Schubmittelpunkt des Querschnitts und Querkraft-Hauptachsensystem	34
4.1. Skizze von Modulen, die über Schnittstellen kommunizieren. Blau: Module, schwarz: Untermodule, rot: Abhängigkeiten	37
4.2. Darstellung der Module (bunt) und den Schnittstellen (grau) von PreDoCS	37

4.3. Ablaufdiagramm der PreDoCS-Querschnittsberechnung	39
4.4. Ein Element der Kontur	40
4.5. Elementierung der Kontur: gelbe Rechtecke: Elemente; blaue/grau Punkte: Element-Knoten; graue Wolken: Struktur-Knoten; schwarze Strickpunktlinie: Konturmittellinie	41
4.6. Der Ablauf der Elementierung	42
4.7. Kontur-Knoten an einem Profil aus unterschiedlichen Materialien: schwarz: feste Kontur-Knoten, grau: flexible Kontur-Knoten	42
4.8. Ermitteln der Positionen der Element-Knoten (blau) (schwarz: feste Kontur-Knoten, grau: flexible Kontur-Knoten, rot: Normalenvektoren der Kontur)	42
5.1. Geometrien der Test-Querschnitte zur Validierung	45
5.2. Isoparametrisches Rechteckelement (BECAS Q4-Element) [45]	48
5.3. Vergleich der Membran-Schubspannungsverläufe des Querschnitts 102 aus isotropem Material durch ein „1“-Torsionsmoment	50
5.4. Vergleich der Membran-Schubspannungsverläufe des Querschnitts 102 aus isotropem Material durch eine „1“-Querkraft in x -Richtung	51
5.5. Vergleich der transversalen Schubspannungsverläufe des Querschnitts 100 aus isotropem Material durch eine „1“-Querkraft in x -Richtung	52
5.6. CAS- und CUS-Anordnung	53
5.7. Steifigkeits-Koeffizienten unter Variation des Faserwinkels	55
5.8. Steifigkeits-Koeffizienten unter Variation der Elementlänge	57
6.1. Einfluss der Querkraft: a) nichtlinearer Verlauf von Schubspannung und Scherung, b) tatsächliche Verwölbung des Querschnitts, c) Näherung für Schubspannung und Scherung nach Timoschenko [40]	58
6.2. Vergleich des Elastizitäts- und Schubmodul für die Berechnung nach Schürmann [8] und Song [34]	61
6.3. Betrag des Scheibensteifigkeits-Koeffizient A_{26} über dem Faserwinkel	62
6.4. Vergleich der Rechenzeiten der Ansätze	63
G.1. Steifigkeits-Koeffizienten unter Variation des Faserwinkels	A19
G.1. Steifigkeits-Koeffizienten unter Variation des Faserwinkels	A20
H.2. Steifigkeits-Koeffizienten unter Variation der Elementlänge	A21
H.2. Steifigkeits-Koeffizienten unter Variation der Elementlänge	A22

Tabellenverzeichnis

2.1. Vergleich bestehender Ansätze zur Querschnittsberechnung von Balken aus Faserverbund-Werkstoffen	11
5.1. Übersicht der Testfälle zur Validierung	44
C.1. Materialdaten der Faserverbund-Schichten	A4
C.2. Laminat L1	A4
C.3. Laminat L2	A5
D.4. Qualitative Bewertungskriterien zur Plausibilitätsprüfung der Ergeb- nisse der Berechnung der Test-Querschnitte aus isotropem Material . .	A6
E.5. Testfall 100	A7
E.6. Testfall 101	A7
E.7. Testfall 102	A8
E.8. Testfall 103	A8
E.9. Testfall 104	A9
E.10. Testfall 105	A9
E.11. Testfall 106	A10
F.12. Testfall 200	A11
F.13. Testfall 201	A11
F.14. Testfall 202	A12
F.15. Testfall 203	A12
F.16. Testfall 204	A13
F.17. Testfall 205	A13
F.18. Testfall 206	A14
F.19. Testfall 210	A14
F.20. Testfall 211	A15
F.21. Testfall 220	A16
F.22. Testfall 221	A17
F.23. Testfall 222	A18

Abkürzungsverzeichnis

CAD	Computer-aided Design
CAS	Circumferentially Asymmetric Stiffness
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFK	Kohlenstoff"-faser"-verstärkter Kunststoff
CLT	Klassische Laminat Theorie [6, 8]
CUS	Circumferentially Uniform Stiffnesss
DGL	Differentialgleichung
DLR	Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt
DTU	Dänemarks Technische Universität
ESP	elastischer Schwerpunkt
FE	Finite Elemente
FEM	Finite Element Methode
GFK	Glas"-faser"-verstärkter Kunststoff
HAW	Hauptachsenwinkel
MDO	multidisziplinäre Entwurfsoptimierung
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
QS	Querschnitt
SMP	Schubmittelpunkt
UD	Unidirektional
VAM	Variational Asymptotic Method

Symbolverzeichnis

\vec{v}	Vektor
\mathbf{M}	Matrix
$(\cdot)'$	Ableitung nach der Balkenlängsachse z
$\int_C ds$	Integral über die gesamte Querschnittskontur
(x, y, z)	Querschnitts-Koordinatensystem
(n, s, z)	lokales Kontur-Koordinatensystem
$(1, 2, 3)$	Schicht-Koordinatensystem
(X_b, Y_b)	Biege-Hauptachsen-Koordinatensystem
(X_s, Y_s)	Querkraft-Hauptachsen-Koordinatensystem
a	geometrische Größe, siehe Abbildung 3.2
E_i	Elastizitätsmodul in i -Richtung
$\varepsilon_i, \varepsilon_{ii}$	Dehnung in i -Richtung
ε_{ij}	Tensor-Scherung in der i - j -Ebene
ε_{zz}^0	Dehnung der Konturmittellinie in Balkenlängsrichtung
η_{ij}	Koppel-Parameter
F_x, F_y, F_z	Querschnitts-Schnittkräfte
f_x, f_y, f_z	Streckenlasten des Balkens
γ_{ij}	Ingenieurs-Scherung in der i - j -Ebene
γ_{nz}	transversale Scherung der Kontur
γ_{sn}	Scherung in der Querschnittsebene
γ_{sz}	Membran-Scherung der Kontur
γ_{sz}^0	Membran-Scherung der Kontur durch Biegung und Querkraft

γ_{sz}^t	Membran-Scherung der Kontur durch Torsion
γ_{xz}	Scherung des Querschnitts in der x - z -Ebene
γ_{yz}	Scherung des Querschnitts in der y - z -Ebene
G_{ij}	Schubmodul in der i - j -Ebene
k	Index der Laminat-Schicht
κ_{zz}	Krümmung der Kontur um die s -Achse
K_x, K_y	Schubkorrekturfaktoren
L	Länge des Balkens
\mathbf{A}	lokale Scheiben-Steifigkeitsmatrix
\mathbf{B}	lokale Koppel-Steifigkeitsmatrix
\mathbf{D}	lokale Platten-Steifigkeitsmatrix
\mathbf{G}	Schicht-Nachgiebigkeitsmatrix
\mathbf{H}	Schicht-Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}	reduzierte Material-Steifigkeitsmatrix
\mathbf{L}	Torsionsnachgiebigkeits-Diagonalmatrix der Segmente
\mathbf{M}	Zuordnungsmatrix der Segmente zu den Zellen
\mathbf{Q}	reduzierte Schicht-Steifigkeitsmatrix im Schicht-Koordinatensystem
$\overline{\mathbf{Q}}$	reduzierte Schicht-Steifigkeitsmatrix im Laminat-Koordinatensystem
\mathbf{R}	Matrix zu Umrechnung von Tensor-Scherungen in ingenieurmäßige Scherungen
\mathbf{S}	Querschnitts-Steifigkeitsmatrix
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
M_x, M_y, M_z	Querschnitts-Schnittmomente
M_{zz}, M_{sz}	lokale Momentenflüsse an der Kontur
m_x, m_y, m_z	Streckenmomente des Balkens
N	Anzahl der Schichten des Laminats
N_{ss}, N_{zz}	lokale Normalkraftflüsse an der Kontur
N_{sz}, N_{nz}, N_{sn}	lokale Schubkraftflüsse an der Kontur

ν_{ij}	Querkontraktionszahl für eine Querkontraktion in j -Richtung bei einer Belastung in i -Richtung
ϕ	Drehung des Querschnitts um den Schubmittelpunkt
ψ	Torsionsfunktion
ρ	Dichte
r_n	geometrische Größe, siehe Abbildung 3.2
σ_i	Normalspannung in in i -Richtung
$\sigma_{ss}, \sigma_{zz}, \sigma_{nn}$	Normalspannungen an einem Kontur-Element
$\sigma_{sz}, \sigma_{nz}, \sigma_{sn}$	Schubspannungen an einem Kontur-Element
t	Dicke
τ_{ij}	Schubspannung in der i - j -Ebene
Θ_x	Drehung des Querschnitts um die x -Achse
Θ_y	Drehung des Querschnitts um die y -Achse
U	Formänderungsenergie
u, v, w	lokale Querschnittsverformungen
u_0, v_0, w_0	Starrkörper-Verschiebung des Querschnitts
\vec{A}	umschlossene Flächen der Zellen
$\vec{\alpha}$	Torsionsnachgiebigkeit der einzelnen Segmente
$\vec{\gamma}$	Vektor der Querschnittsverformungen
\vec{l}	Länge der einzelnen Segmente
$\vec{\lambda}$	Torsionsverteilungsvektor
W	Arbeit durch externe Kräfte

Bibliographische Angaben

Verfasser:	Daniel Hardt
Geboren:	29.01.1996 in Siegen
Mat.-Nr.:	3046544
Titel:	Entwicklung eines Vorauslegungstools für Flügelstrukturen aus Faserverbundwerkstoffen
Dokumentenart:	Bachelorarbeit
Studiengang:	Luft- und Raumfahrttechnik
Kooperation:	FH Aachen Fachbereich 6, Luft- und Raumfahrttechnik Lehrgebiet Luftfahrzeugtechnik Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik Ottenbecker Damm 12, 21684 Stade
Abgabedatum:	23.02.2018
Schlagworte:	Vorauslegung, Flügelstrukturen, Querschnittsberechnung, Faserverbundwerkstoffe, elastische Strukturkopplung, Aeroelastic Tailoring, Python

1. Einleitung

Die Entwicklung eines Flugzeuges wird in drei Phasen eingeteilt. In jeder der drei Phasen müssen unterschiedliche Fragestellungen beantwortet werden.

Die erste Phase ist die Konzeptphase, in der viele Konzepte erstellt und miteinander verglichen werden. Diese Konzepte besitzen noch eine sehr geringe Detailtiefe und werden durch einfache Design-Variablen wie Streckung, Pfeilung, Anzahl der Triebwerke, Leitwerkskonfiguration etc. beschrieben [1]. Die Analyse dieser Konzepte basiert somit auch auf sehr einfachen Modellen. Diese einfachen Modelle basieren meist auf simplen analytischen oder empirischen Ansätzen. Am Ende der Konzeptphase wird ein finales Konzept gewählt, an dem im weiteren Verlauf der Entwicklung keine großen Änderungen mehr vorgenommen werden. So werden z.B. Leitwerksanordnung, Fahrwerksposition und Spannweite nicht mehr wesentlich verändert [2].

Die Definitionsphase ist die zweite Phase der Entwicklung. In dieser Phase wird das Konzept der Konzeptphase in den einzelnen Fachabteilungen weiter detailliert. Es werden jetzt auch kostenintensivere und genauere Analysen durchgeführt, wie z.B. CFD-, FEM- oder Windkanal-Analysen. Weitergehende Design-Aspekte wie die genaue Flügelgeometrie oder Definition der Struktur werden festgelegt.[1, 2]

In der auf die Definitionsphase folgenden Entwicklungsphase werden sämtliche Teile des Flugzeuges komplett detailliert. Es werden CAD-Modelle und Fertigungszeichnungen erstellt und die Produktion wird vorbereitet. In dieser Phase findet eine Optimierung nur noch auf Bauteil-Ebene statt und nicht mehr auf Flugzeug-Ebene.[2]

In Abbildung 1.1 ist ein Flügelholm in den unterschiedlichen Phasen der Entwicklung dargestellt. Für einen Flügelholm ist in der Konzeptphase beispielsweise nur die Position in der Draufsicht als Linie bekannt. In der Definitionsphase werden die Querschnitte des Holms festgelegt, allerdings reichen diese Informationen noch nicht aus, um den Holm zu fertigen, z.B. werden Wartungsöffnungen und Fertigungsaspekte noch nicht berücksichtigt. Diese Details werden erst in der Entwicklungsphase betrachtet, so dass am Ende dieser Phase das Bauteil gefertigt werden kann.[2]

Auch bei der Entwicklung von Hubschraubern und Windkraftanlagen wird vor der eigentlichen Entwicklung eine Vorauslegung von verschiedenen Konzepten durchgeführt (entspricht der Konzeptphase beim Flugzeugentwurf). Dabei kann der Einfluss von bestimmten Entwurfparametern auf das endgültige Produkt abgeschätzt werden. Bei der Vorauslegung werden vereinfachte physikalische Modelle verwendet, da die Genauigkeit nicht so groß sein muss und die Berechnungen dadurch schneller

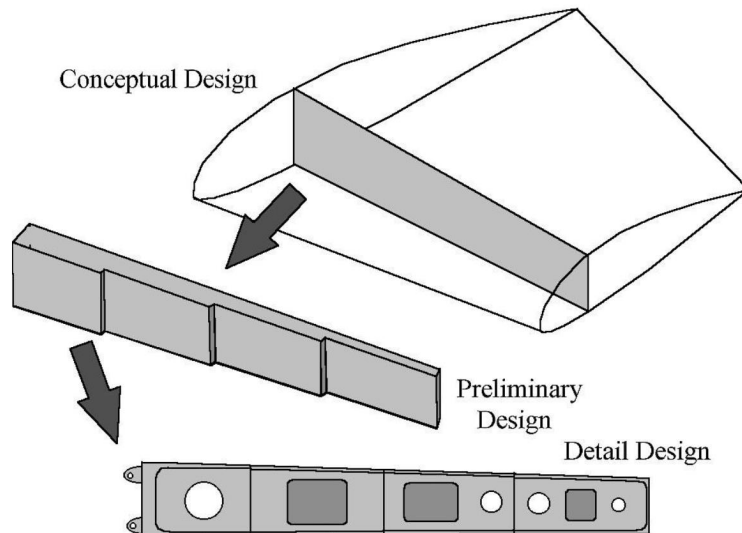


Abbildung 1.1.: Detailgenauigkeit eines Holms in den unterschiedlichen Phasen der Entwicklung eines Flugzeuges [2]

werden.

Solche Modelle zur Vorauslegung werden auch oft im Rahmen einer multidisziplinären Entwurfsoptimierung (MDO) verwendet. Wenn ein komplexes System wie z.B. ein Flugzeug, ein Helikopter oder eine Windkraftanlage optimiert werden soll, haben sehr viele Entwurfsparameter aus unterschiedlichen Disziplinen Einfluss auf die Zielfunktion der Optimierung. Wird beispielsweise bei einem Flugzeug der Treibstoffverbrauch als Zielfunktion gewählt, so haben unter anderem Aerodynamik, Struktur und Triebwerke einen Einfluss auf die Zielfunktion. Auch beeinflussen sich die Disziplinen gegenseitig. So muss z.B. für eine schwerere Struktur mehr Auftrieb erzeugt werden, was die Flügelfläche erhöht. Eine erhöhte Flügelfläche führt aber wieder zu einer größeren Strukturmasse. Daher wird bei einer MDO die Optimierung auf Systemebene unter Berücksichtigung aller Disziplinen durchgeführt.

In der Vorauslegung von Flügeln von Flugzeugen und Rotorblättern von Helikoptern und Windkraftanlagen (im Folgenden zu „Flügelstrukturen“ zusammengefasst, einige Beispiel-Querschnitte in Abbildung 1.2) ist es ein Entwurfsziel, so leicht wie möglich zu bauen. So kann bei Flugzeugen und Helikoptern mehr Nutzlast transportiert und bei Windkraftanlagen können größere Rotordurchmesser erreicht werden. Deshalb werden Flügelstrukturen zunehmend aus Faserkunststoffverbund-Werkstoffen wie Glas"-faser"-verstärkter Kunststoff (GFK) oder Kohlenstoff"-faser"-verstärkter Kunststoff (CFK) hergestellt.[3] Durch diese Werkstoffe, die bessere spezifische Eigenschaften als das zuvor meist verwendete Aluminium besitzen, kann die Strukturmasse reduziert werden.

Des Weiteren lassen sich mit Faserverbund-Werkstoffen sehr gut elastische Kopplungen der Struktur erreichen. Durch einen nicht ausgeglichenen Laminataufbau und

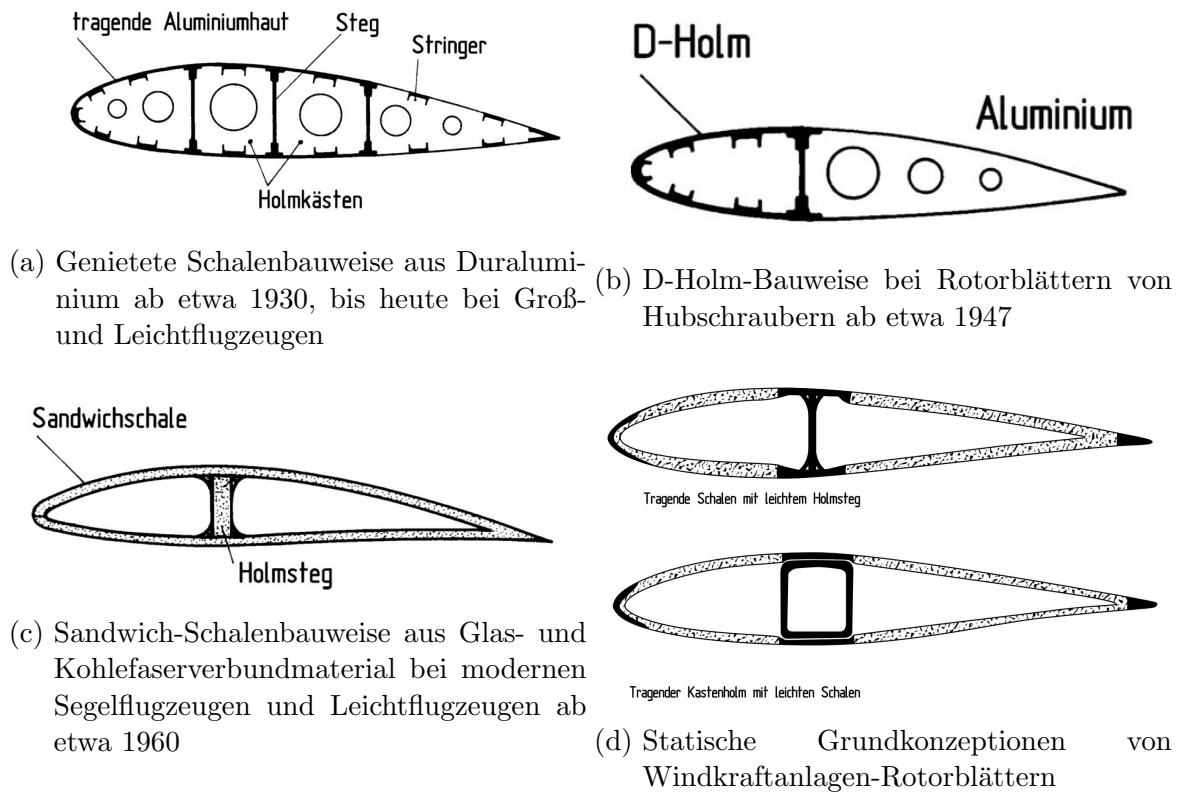


Abbildung 1.2.: Verschiedene Flügelquerschnitte [3]

die damit verbundenen nicht isotropen Eigenschaften des Materials lassen sich beispielsweise Flügel bauen, die sich bei einer Biege-Belastung gleichzeitig tordieren (Abbildung 1.3).

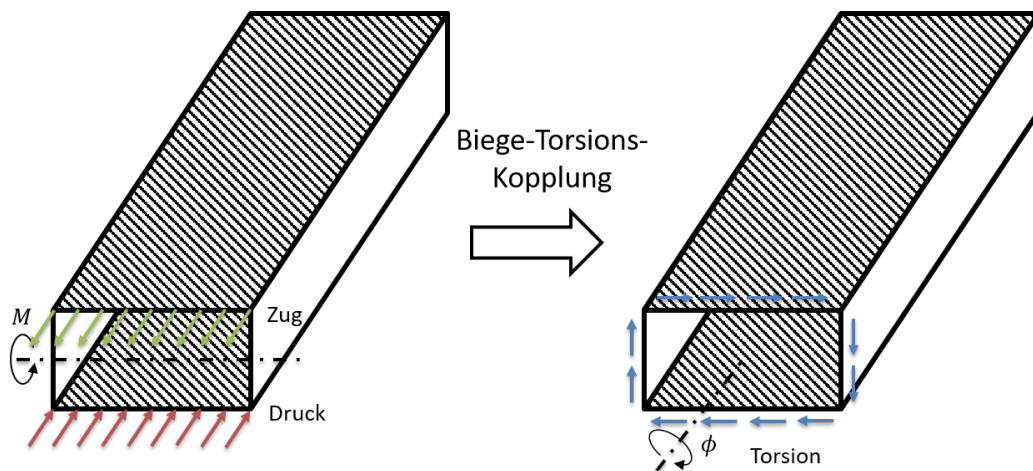
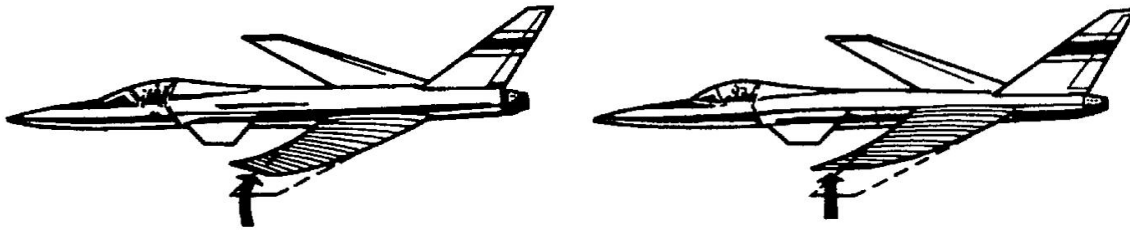


Abbildung 1.3.: Biege-Torsions-Kopplung eines Balkens aus Faserverbund-Material

Mit diesen elastischen Kopplungen können die Aeroelastik, die Eigenfrequenzen und die Beanspruchung des Flügels positiv beeinflusst werden [4, 5]. So kann beispielsweise ein Flügel so ausgelegt werden, dass er sich wie in Abbildung 1.4 unter aerodynamischer Belastung (Biegung und Torsion) nicht verdrillt, was sich positiv auf die Divergenzgeschwindigkeit auswirkt. Dies ist vor allem für Flugzeuge mit nach vor-

ne gefeilten Tragflächen interessant, da sie eine geringere Divergenzgeschwindigkeit besitzen als Flugzeuge mit nach hinten gefeilten Tragflächen.



(a) kein Aeroelastic Tailoring: Biegung und Verdrillung (b) Aeroelastic Tailoring: Biegung, aber keine Verdrillung

Abbildung 1.4.: Verformung eines vorwärts gefeilten Flügels unter aerodynamischer Belastung [6]

1.1. Motivation und Problemstellung

In der Abteilung Funktionsleichtbau des Instituts für Faserverbundleichtbau und Ad-
aptronik des Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) soll ein Python¹-
Vorauslegungstool für Flügelstrukturen aus Faserverbund-Werkstoffen entwickelt wer-
den („PreDoCS“, **P**reliminary **D**esign of **C**omposite **S**tructures). Dieses soll zur
schnellen Bewertung von Bauweisen eingesetzt und in ein MDO-Framework integriert
werden. PreDoCS gliedert sich wie in Abbildung 1.5 dargestellt in drei Ebenen:

- Die erste Ebene behandelt Themen, die für den ganzen Flügel bzw. das ganze Rotorblatt relevant sind. Hier findet die globale Definition der Geometrie statt. Dazu gehören die äußere und innere Geometrie des Flügels und die Materialverteilung. Es werden auch die äußeren Belastungen bestimmt und mit einer globalen Steifigkeitsverteilung können so die globalen Verformungen für jede Belastung berechnet werden.
- Die Querschnitts-Ebene stellt die zweite Ebene dar. Dort werden die Steifigkeiten der einzelnen Querschnitte berechnet. Des Weiteren kann für jede Belastung die Beanspruchung (Verformungen, Schnittkraftflüsse und Schnittmomentenflüsse) über der Querschnitts-Kontur ermittelt werden.
- In der dritten Ebene, der Laminat-Ebene, werden die Beanspruchungen aus der Querschnitts-Ebene verwendet, um die Dehnungen und Spannungen in den einzelnen Schichten des Laminats an jeder Stelle der Querschnitts-Kontur berechnen zu können. So können dann mit unterschiedlichen Versagenskriterien Aussagen über die Festigkeit und die Stabilität des Flügels getroffen werden [6, 7].

¹Programmiersprache, <https://www.python.org/>

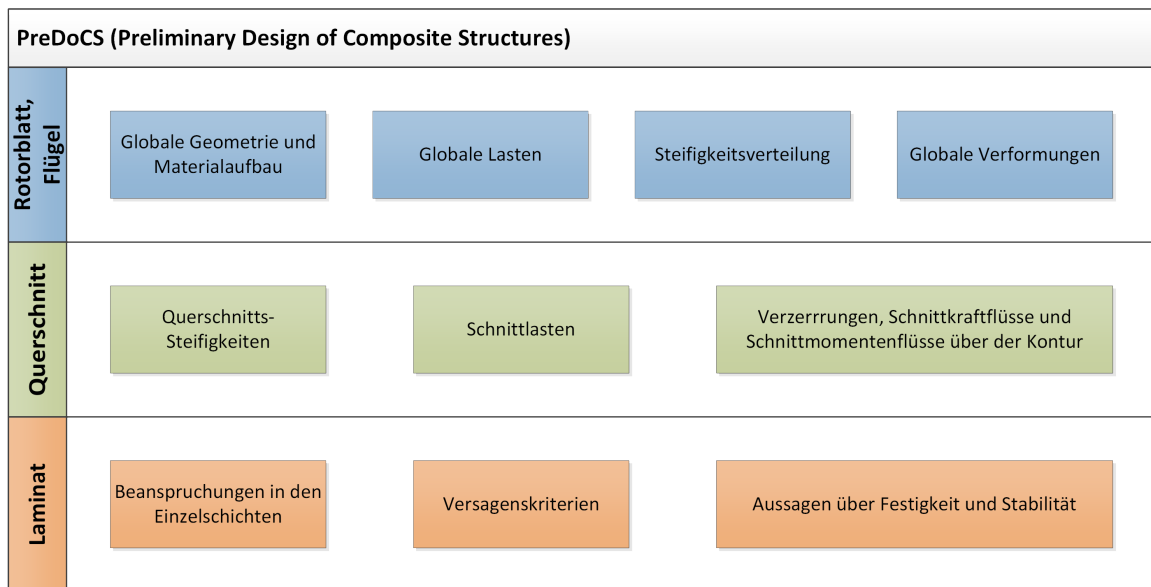


Abbildung 1.5.: Ebenen des Vorauslegungstools PreDoCS

Ziel dieser Bachelorarbeit ist die Entwicklung des Python-Moduls zur Querschnittsberechnung von Flügelstrukturen, entsprechend der zweiten Ebene in Abbildung 1.5. Die Anforderungen an dieses Modul sind in Abschnitt 1.2 zusammengestellt. Anhand dieser Anforderungen wird in Kapitel 2 eine Recherche über theoretische Ansätze zur Berechnung von Querschnitts-Steifigkeiten von Balken aus Faserverbund-Materialien durchgeführt und ein Ansatz ausgewählt. Dieser wird dann in Kapitel 3 beschrieben und auf beliebige mehrzellige Querschnitte erweitert. In Kapitel 4 wird näher auf die Implementierung des zuvor beschriebenen Ansatzes eingegangen. Die Ergebnisse des entwickelten PreDoCS-Moduls werden in Kapitel 5 mit dem 2D-FE-Tool BECAS verglichen. Anschließend werden diese Ergebnisse dann bewertet und noch einmal zusammengefasst.

1.2. Anforderungen an das Querschnittsmodul

Ein Flügel wird in PreDoCS mechanisch als Balken modelliert. Für die vorgesehenen Anwendungen muss das Querschnittsmodul folgende Anforderungen erfüllen:

- Geometrie: Es sollen Flügel und Rotorblätter aus mehrzelligen, geschlossenen, dünnwandigen Querschnitten berechnet werden.
- Material:
 - Ein Querschnitt kann aus unterschiedlichen Materialien aufgebaut sein.
 - Die Materialien verhalten sich linear-elastisch.
 - Es sollen Faserverbund-Materialien berechnet werden können. Dabei kann aufgrund der dünnwandigen Struktur das Materialverhalten über die Dicke

der Kontur homogenisiert werden (vgl. Klassische Laminat Theorie [6, 8] (CLT)).

- mechanische Anforderungen:
 - Berücksichtigen der Verformung durch Querkraftschub (schubweiche Biegung, weil diese wichtig für Eigenmodi mit kleiner Wellenlänge und kurze Flügel ist [9, 10]. Außerdem ist das Verhältnis von Elastizitäts- zu Schubmodul für Faserverbund-Materialien um eine Größenordnung größer als bei herkömmlichen Materialien. Durch diese Schubweichheit kommt es zu Effekten durch Verformung durch Querkraftschub, die berücksichtigt werden müssen [10, 11, 12].
 - Berechnung der vollständigen elastischen Kopplung aller Belastungen und Verformungen (Freiheitsgrade) des Querschnitts. Dazu gehört z.B. die für das Aeroelastic Tailoring wichtige Biege-Torsions-Kopplung.
- Berechnungsmethode: Aus Performance-Gründen soll explizit kein FEM-Ansatz verwendet werden, sondern die Berechnungen sollen auf einer analytischen Methode basieren.
- Ausgabe des Querschnittmoduls:
 - Querschnittssteifigkeiten. Unter der Querschnittssteifigkeit wird der Zusammenhang zwischen den in einem Balkenquerschnitt angreifenden Schnittlasten (Normal- und Querkräfte, sowie Torsions- und Biegemomente) und den Querschnittsverformungen (siehe Abschnitt 3.1.1) verstanden.
 - elastischer Schwerpunkt (ESP), Schubmittelpunkt (SMP) und Biegehauptachsen.
 - Beanspruchung (Verformungen, Schnittkraftflüsse und Schnittmomentenflüsse) an jeder Stelle der Kontur des Querschnitts für einen gegebenen Lastfall.
- Rechenzeit: Die Berechnung von einem Querschnitt unter 100 Lastfällen soll maximal 1 min dauern.
- Verteilte Ausführung: Für die Anwendung in einer multidisziplinären Entwurfs-optimierung (MDO) soll PreDoCS auf in Rechnerverbund verteilt ausgeführt werden können.

2. Stand der Technik zur Querschnittsberechnung

Ein Balken ist ein mechanisches Modell und zeichnet sich dadurch aus, dass eine Längendimension signifikant größer ist als die anderen beiden, Beispiele von ausgeführten Balken in Abbildung 2.1 gezeigt. Dadurch lässt sich die Berechnung des Balkens, die ein dreidimensionales Problem darstellt, unterteilen in eine zweidimensionale Querschnittsberechnung und eine eindimensionale Balkenberechnung. Dieses Verfahren wird auch Dimensionsreduktion genannt.[4, 9]



(a) Flügel eines Segelflugzeuges [13]



(b) Rotor und Turm einer Windkraftanlage [14]

Abbildung 2.1.: Balken: eine Längendimension ist größer als die anderen beiden

Der Ablauf der Balkenberechnung ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Im ersten Schritt werden die Querschnittssteifigkeiten berechnet. Zusätzlich ergeben sich für jeden Querschnitt kinematische Beziehungen, mit denen die Verformungen an jeder Stelle eines Querschnitts aus den Balkenverformungen an dieser Stelle berechnet werden können („Wiederherstellungs-Beziehungen“). Für jeden Lastfall (definiert durch Belastungen und Randbedingungen) müssen die 1D-Differentialgleichungen (DGLen) gelöst werden, aus denen sich die Balkenverformungen des gesamten Balkens ergeben. Aus diesen Balkenverformungen können jetzt mit Hilfe der Wiederherstellungs-Beziehungen die Verformung an jeder Stelle des Balkens berechnet werden. Über das Materialverhalten lassen sich aus diesen Verformungen die Beanspruchungen des Materials berechnen.

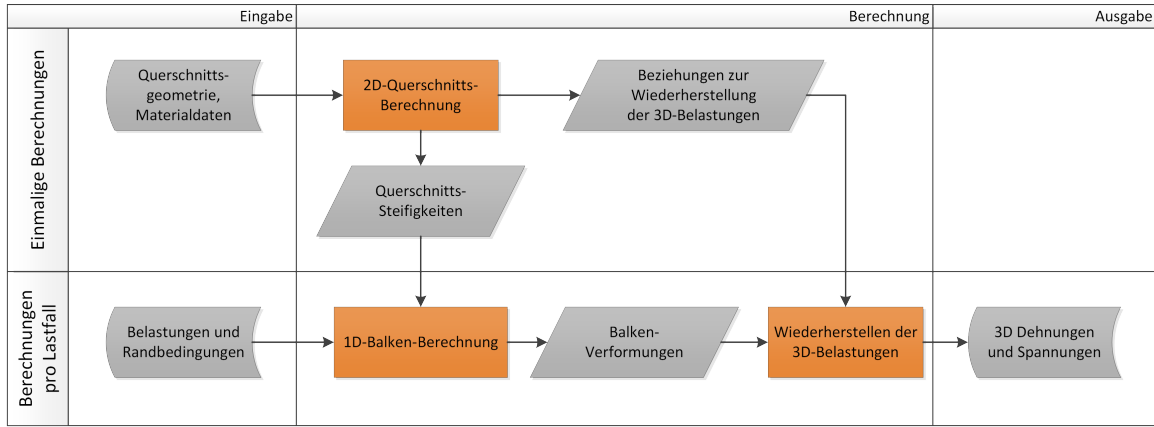


Abbildung 2.2.: Ablauf der Balken-Berechnung nach Hodges [9]

Um die Dimensionsreduktion durchzuführen, muss ein Ansatz gefunden werden, die Formänderungsenergie der dreidimensionalen Struktur in eine eindimensionale Form zu bringen [15]. Dazu wird die Formänderungsenergie mit Hilfe einer Querschnitts-Steifigkeitsmatrix aus den Querschnittsverformungen (Freiheitsgrade des Querschnitts) berechnet:

$$U = \frac{1}{2} \vec{\gamma}^T \mathbf{S} \vec{\gamma} \quad (2.1)$$

\mathbf{S} ist die Steifigkeitsmatrix und $\vec{\gamma}$ der Vektor der Querschnitts-Verformungen. Je nach Balkenmodell hat der Querschnitt unterschiedliche Freiheitsgrade, somit hat auch $\vec{\gamma}$ eine andere Größe und \mathbf{S} eine andere Dimension.

Ein Euler-Bernoulli-Balkenmodell hat vier Querschnitts-Freiheitsgrade: Die Längsdehnung ε_{zz} , die Verdrillung ϕ' und die Ableitung der Verdrehung um die beiden im Querschnitt liegenden Achsen Θ'_x und Θ'_y . Somit hat $\vec{\gamma}$ die Länge 4 und \mathbf{S} die Größe 4×4 .

Wird ein Timoschenko-Balkenmodell verwendet, erhält der Querschnitt zwei weitere Freiheitsgrade: die Scherung in der x - z -Ebene γ_{xz} und die Scherung in der y - z -Ebene γ_{yz} . Damit hat $\vec{\gamma}$ nun die Länge 6 und \mathbf{S} die Größe 6×6 .

Die Berechnung der Querschnittssteifigkeiten kann unter Anwendung eines analytischen Ansatzes oder mit einem Finite-Elemente-Ansatz geschehen. Dabei gibt es reine 2D-FE-Ansätze, die den Querschnitt aus zweidimensionalen finiten Elementen aufbauen, als auch eine Mischung von analytischem und FE-Ansatz. Dabei wird ein analytischer Ansatz zur Berechnung der Querschnittssteifigkeit hergeleitet, allerdings mit einer als gegeben angenommenen Verwölbung des Querschnitts. Diese Verwölbung wird dann im zweiten Schritt mit einem 1D-FE-Modell über der dünnwandigen Kontur bestimmt (vgl. Saravia, Saravia und Cortínez [16]).

Auch bei der analytischen Berechnung teilen sich die Ansätze in zwei Kategorien auf, in die Verformungs-Formulierung und die Spannungs-Formulierung. Sie unterscheiden sich in dem Ansatz zur Berechnung der Schubspannungen. Die Verformungs-

Formulierung nimmt eine Verformung des Querschnittes an, aus der sich über die Materialgesetze dann die Schubspannungen berechnen können. Die Spannungs-Formulierung kommt ohne diese Annahme der Verformungen aus und nimmt eine Normalspannungsverteilung an. Daraus werden dann die Schubspannungen aus der Integration der Gleichgewichtsbedingung an einem Kontur-Element berechnet (vgl. Jung, Nagaraj und Chopra [17]). Die Spannungs-Formulierung führt so zu besseren Schubspannungsverläufen [18].

Auch das Lösen der 1D-DGLe kann sowohl analytisch als auch mit einem FE-Ansatz geschehen. Zur Lösung mit finiten Elementen wird der Flügel wie in Abbildung 2.3 mit Balkenelementen diskretisiert. Diese erhalten als Eingabe die zuvor errechneten Querschnittssteifigkeiten.

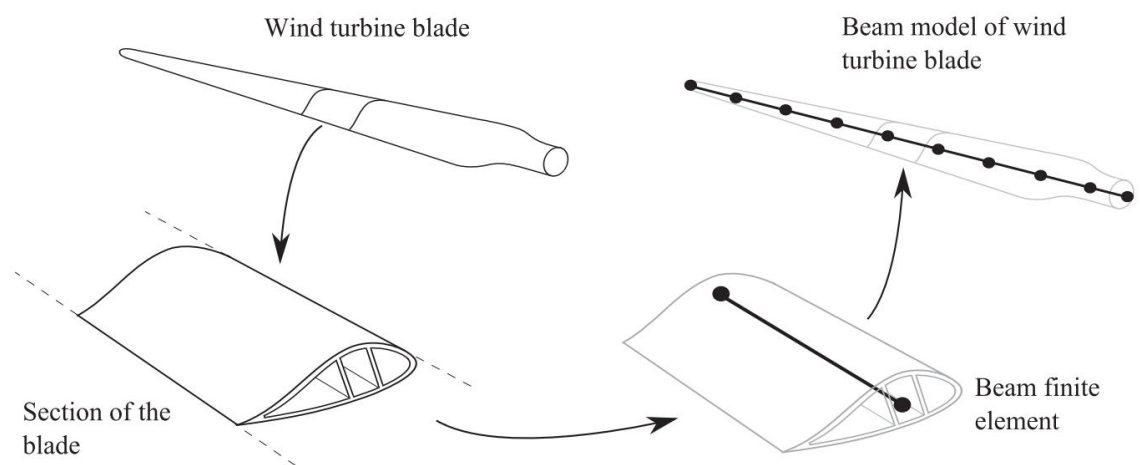


Abbildung 2.3.: Modellierung eines Rotorblatts mit Balkenelementen [19]

2.1. Vergleich bestehender Ansätze

Die historische Entwicklung der Ansätze zur Berechnung von Balken aus Faserverbund-Materialien ist in Hodges [9] gut beschrieben. Chen, Yu und Capellaro [15] vergleichen bestehende Tools zur Querschnittsberechnung („PreComp“ [20], „VABS“ [21], „FAROB“ [22], „CROSTAB“, „BPE“ [23]). In Jung, Nagaraj und Chopra [4] werden verschiedene theoretische Ansätze zur Berechnung von Balken aus Faserverbund-Materialien miteinander verglichen.

Ein eigener Vergleich von theoretischen Ansätzen zur Berechnung von Faserverbund-Balken ist durchgeführt worden und ein Auszug davon ist in Tabelle 2.1 dargestellt. Da für jeden Ansatz unterschiedliche Annahmen getroffen werden, können damit unterschiedliche Effekte abgebildet werden. Deswegen wurden folgende Merkmale ausgewählt, anhand derer die Ansätze verglichen werden:

- Querschnittsgeometrie: offene Querschnitte, geschlossene einzellige Querschnitts-

te, geschlossene mehrzellige Querschnitte, Vollquerschnitte, dünnwandige Kontur, dickwandige Kontur

- Balkengeometrie: vorgebogen (Balkenlängsachse nicht gerade), vorverdreh (Querschnitt rotiert um die Balkenlängsachse im unverformten Zustand)
- Berechnungsansatz: analytischer Ansatz, 1D-FEM-Ansatz, 2D-FEM-Ansatz
- berücksichtigte Effekte:
 - Querschnittssteifigkeit:
 - * Anzahl der Freiheitsgrade eines Querschnitts (Dimension der Steifigkeitsmatrix).
 - * elastische Kopplung der einzelnen Freiheitsgrade des Querschnitts
 - Berücksichtigung von Verformung durch Querkraft
 - Berücksichtigen von Effekten durch behinderte Verwölbung (z.B. Auftreten von Wölbnormalspannungen)
 - Berechnung von Verformungen des Querschnitts in der Querschnitt-Ebene (z.B. durch Querkontraktion)
 - Berechnung von Verformungen des Querschnitts aus der Querschnitt-Ebene (z.B. Verwölbung durch Torsion)
- Materialverhalten:
 - homogener oder heterogener Materialaufbau über der Konturdicke
 - Modellierung der Kontur:
 - * als Scheibe: konstante Spannungen über der Konturdicke
 - * als Platte: nicht konstante Spannungen über der Konturdicke
 - * Berücksichtigen von transversalem Schub (Schub in Konturdickenrichtung)
- Kraftfluss in Konturrichtung (Umfangsspannungen) gleich Null (häufige Annahmen, unzulässig für Strukturen unter Innendruck, z.B. Druckkabine oder bedruckte Tanks)
- lineare Längsdehnungsverteilung über den Querschnitt, entspricht den Annahmen der Balkenmodelle nach Euler-Bernoulli und Timoschenko

Tabelle 2.1.: Vergleich bestehender Ansätze zur Querschnittsberechnung von Balken aus Faserverbund-Werkstoffen

Veröffentlichung	offene QS	geschlossene einzellige QS	geschlossene mehrzellige QS	dünnwandige QS	dicke wandige QS	Vollquerschnitte	Vorgebogen und -verdreht	Berechnungsansatz	Dimension der Steifigkeitsmatrix	elastische Kopplung	schubweiche Modellierung	Verformung aus der Ebene	Verformung in der Ebene	behinderte Verwölbung	homogener Materialaufbau	heterogener Materialaufbau	Scheibenbelastung	Plattenbelastung	transversaler Schub	Umfangsspannungen = 0	lineare Längsdehnungsverteilung	Bemerkungen
Chandra und Chopra [24]	x	x	x	x	-	-	-	Analytisch	9	x	x	x	-	x	x	-	x	x	-	x	-	sehr einfach
Dugas [25]	-	x	-	x	-	-	-	Analytisch	4	x	-	-	-	-	x	-	-	-	-	x	x	Spannungs-Formulierung
Johnson, Vasiliev und Vasiliev [18]	-	x	-	x	-	-	-	Analytisch	6	x	x	-	-	-	x	-	x	-	-	x	x	Analytischer Ansatz für dickwandige Querschnitte
Jung, Nagaraj und Chopra [17]	x	x	x	x	x	-	-	Analytisch	7	x	x	x	-	x	x	-	x	x	x	x	-	nur Rechteckquerschnitte
Kim und White [26]	-	x	-	x	x	-	-	Analytisch	6	x	x	x	-	-	x	-	x	-	-	x	-	ähnlich zu Mansfield und Sobey [28]
Libove [27]	-	x	x	x	-	-	-	Analytisch	-	x	x	-	-	-	x	-	x	-	-	x	x	
Mansfield und Sobey [28]	-	x	-	x	-	-	-	Analytisch	4	x	-	-	-	-	x	-	x	-	-	-	x	sehr ähnlich zu Chandra und Chopra [24], aber mit transversalem Schub und 7x7-Steifigkeitsmatrix
Qin und Librescu [29]	-	x	-	x	-	-	-	Analytisch	7	x	x	x	-	x	x	-	x	x	x	x	-	Ansatz über Torsion-Verwölbungsfunktion nur Biegung um eine Achse und Torsion Erweiterung von Lee [32] auf geschlossene Querschnitte
Rehfield, Atilgan und Hodges [30]	-	x	-	x	-	-	-	Analytisch	7	x	x	-	-	-	x	-	x	-	-	-	-	sehr umfangreiche Darstellung, Berücksichtigen von primärer und sekundärer Verwölbung Erweiterung von Rehfield, Atilgan und Hodges [30], Schubtheorie höherer Ordnung, gute Gegenüberstellung von Schubtheorien unterschiedlicher Ordnung
Weisshaar [5]	-	x	-	x	-	-	-	Analytisch	2	x	-	-	-	-	x	-	x	-	-	-	x	Wölbungsfunktion über 1D-FE-Ansatz, sonst analytisch
Vo und Lee [31]	-	x	-	x	-	-	-	Analytisch	8	x	x	x	-	x	x	-	x	-	-	-	-	Implementierung: BECAS [38], verschiedene 2D-FE-Typen, Erweiterung auf vorgebogene und vorverdrehte Balken [39]
Librescu und Song [33]	-	x	-	x	-	-	-	Analytisch	7	x	x	x	-	x	x	-	x	-	-	-	-	Variational Asymptotic Method (VAM)
Song [34]	x	x	x	x	-	-	-	Analytisch	7	x	x	x	-	x	x	-	x	x	x	x	-	
Suresh und Nagaraj [35]	-	x	-	x	-	-	-	Analytisch	7	x	x	-	-	-	x	-	x	-	-	-	x	
Saravia, Saravia und Cortínez [16]	-	x	x	x	-	-	-	1D FEM	6	x	x	x	-	-	x	-	x	-	-	-	-	
und Saravia [36]	-	x	-	-	-	-	-															
Giavotto u. a. [37]	x	x	x	x	x	x	-	2D FEM	6	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	-	-	
Hodges [9]	x	x	x	x	x	x		2D FEM	6	x	x	x	x	-	x	x	x	x	x	-	-	

2.2. Auswahl eines Ansatzes

Mit Blick auf die in Abschnitt 1.2 aufgeführten Anforderungen muss ein Ansatz für die Querschnittsberechnung von PreDoCS gewählt werden. Die Anforderungen haben einen FE-Ansatz ausgeschlossen, somit stehen nur die analytischen Ansätze zur Wahl. Mit den festen Anforderungen, der Behandlung von mehrzelligen Querschnitten, die vollständige elastische Kopplung und die Anwendung eines nicht isotropem Materialverhaltens verringert sich die Auswahl auf die Ansätze nach Song [34], Chandra und Chopra [24] und Jung, Nagaraj und Chopra [17].

Die Ansätze nach Song [34] und Jung, Nagaraj und Chopra [17] gehen von sieben Freiheitsgraden des Querschnitts aus: Längsdehnung, Querkraft in zwei Richtungen, Biegung in zwei Richtungen, Torsion und behinderte Verwölbung. In Chandra und Chopra [24] werden zusätzlich noch die Ableitungen der Querkräfte, die den Streckenlasten entsprechen, als Freiheitsgrad des Querschnitts berücksichtigt. Das Materialverhalten der drei Ansätze wird über der Dicke der Kontur homogenisiert und sowohl Scheiben- als auch Plattenbelastung berücksichtigt. Es wird die Annahme getroffen, dass die Umfangsspannungen zu Null werden.

Die Ansätze nach Song [34] und Jung, Nagaraj und Chopra [17] behandeln transversale Schubspannungen, der Ansatz nach Chandra und Chopra [24] nicht. Der Ansatz nach Jung, Nagaraj und Chopra [17] erfordert eine aufwändigere Berechnung als der nach Song [34], da Song [34] eine Verformungs-Formulierung verwendet und die Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix sind einfache Integrale über die Querschnitts-Kontur. Jung, Nagaraj und Chopra [17] verwenden eine Kombination von Verformungs- und Spannungs-Formulierung, bei dem die Herleitung der Steifigkeitsmatrix über das Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren geschieht.

Aufgrund der einfacheren und dadurch schnelleren Berechnung wird der Ansatz nach Song [34] für das PreDoCS Querschnitts-Modul ausgewählt.

3. Theoretische Aufarbeitung des verwendeten Ansatzes zur Querschnittsberechnung

Die Berechnungen des Querschnitt-Moduls basieren auf einem Balkenmodell, das dem von Song [34] gleicht, aber auf beliebige mehrzellige Querschnitte erweitert wurde. Mit diesem Modell können alle Anforderungen aus Abschnitt 1.2 erfüllt werden.

Folgende Effekte werden in dem beschriebenen Balkenmodell berücksichtigt:

- Material:
 - Ein Querschnitt kann aus unterschiedlichen Materialien aufgebaut sein.
 - Nicht-isotropes Materialverhalten wird nach der CLT abgebildet. Das bedeutet, die Kontur besteht in Dickenrichtung aus verschiedenen orthotropen Schichten. Es wird sowohl Scheiben- als auch Plattenbelastung der Kontur berücksichtigt.
 - Die CLT wird um transversalen Schub erweitert (Theorie erster Ordnung, konstante Scherung über der Dicke der Kontur, nach Song [34]).
- mechanische Effekte:
 - Berücksichtigen der Verformung durch Querkraftschub.
 - Vollständige elastische Kopplung aller Belastungen und Verformungen (Freiheitsgrade) des Querschnitts.

Es werden folgende Annahmen getätigt bzw. Einschränkungen getroffen:

- Geometrie:
 - Der Querschnitt muss geschlossen sein, kann aber aus beliebig vielen Zellen bestehen.
 - Es wird davon ausgegangen, dass sich die Querschnittsgeometrie des Balkens entlang der Balkenlängsachse nicht ändert (prismatischer Balken).
 - Die Balkenachse ist gerade.
- Material:

- Es wird ein linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt.
- Das Material wird über der Dicke der Kontur homogenisiert (vgl. CLT).
- Kinematik:
 - Es treten nur kleine Dehnungen und Scherungen auf.
 - Es tritt keine Verformung des Querschnitts in der Ebene auf (Kontur des Querschnitts nach einer Verformung gleicht der vor der Verformung)
 - Die Scherung durch Querkraft ist konstant über dem Querschnitt (Schubtheorie erster Ordnung, Timoschenko-Theorie).
 - Die Normalspannung in Kontur-Dickenrichtung ist vernachlässigbar klein ($\sigma_{nn} = 0$).
 - Der Normalspannung in Kontur-Richtung ist vernachlässigbar klein ($\sigma_{ss} = 0$)
 - Die in der Querschnittsebene auftretenden Scherung ist vernachlässigbar klein ($\gamma_{sn} = 0$).

In Abschnitt 3.1 wird zunächst der zugrunde liegende Ansatz zur Berechnung der Querschnittssteifigkeit von Song [34] beschrieben. Im darauffolgenden Abschnitt 3.2 wird auf die Erweiterung des Ansatzes von Song [34] auf beliebige mehrzellige Querschnitte eingegangen.

3.1. Ansatz nach Song [34]

Die Herleitung der Querschnittssteifigkeiten nach Song [34] geschieht in drei Schritten. Im ersten Schritt trifft er kinematische Annahmen, um die Verformung der Kontur des Querschnitts in Abhängigkeit der Querschnitts-Verformungen (Querschnitts-Freiheitsgrade) zu beschreiben. Im zweiten Schritt wird das Materialverhalten beschrieben, mit dem aus den Verformungen der Kontur die auftretenden Spannungen berechnet werden können. Dazu nutzt Song [34] eine Erweiterung der CLT um transversalen Schub. Somit können aus den Verformungen der Kontur die Schnittkraftflüsse und die Schnittmomentenflüsse berechnet werden. Mit den so bekannten Verformungen und Spannungen leitet er über das Prinzip der virtuellen Arbeit die Querschnitts-StEIFIGKEITSMATRIX her.

3.1.1. Kinematik

Koordinatensysteme

Es werden zwei miteinander verbundene Koordinatensysteme verwendet, siehe Abbildung 3.1:

1. Globales rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) , im folgenden Balken- bzw. Querschnitts-Koordinatensystem genannt. Dieses Koordinatensystem kann beliebig gewählt werden.
2. Rechtshändiges orthogonales krummliniges Koordinatensystem (s, z, n) . Dieses Koordinatensystem wird als Kontur-Koordinatensystem bezeichnet und folgt der Konturlinie. Die Konturlinie ist die Schnittlinie der Mittelebene der Platte mit der Querschnittsebene.

Der z -Basisvektor der beiden Koordinatensysteme ist identisch und entspricht der Balkenlängsachse.

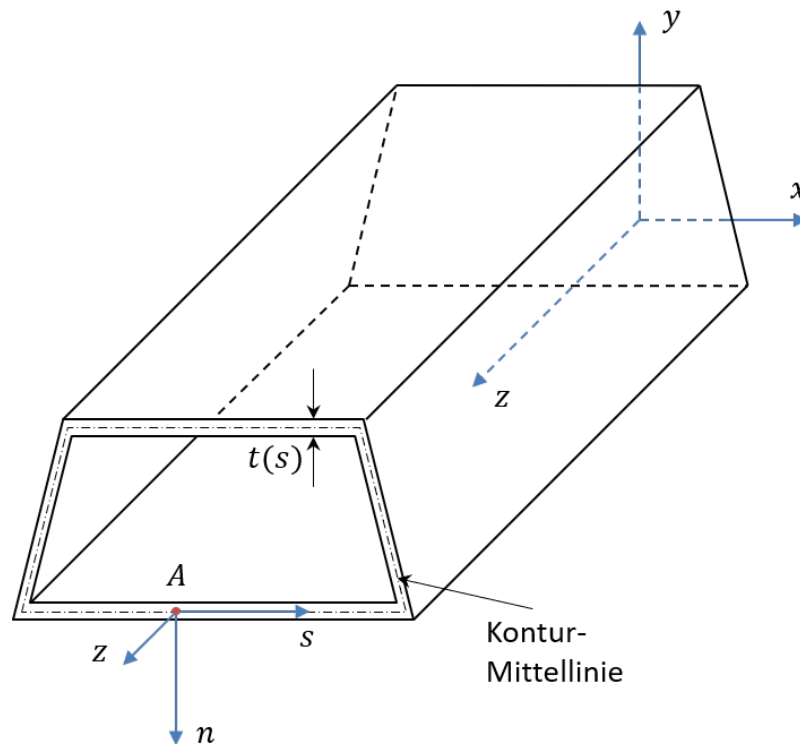


Abbildung 3.1.: Querschnitt-Koordinatensysteme

Verformung des Querschnitts

Aus den Annahmen zur Verformung des Querschnitts ergibt sich das Verschiebungsfeld des Balkens (detaillierte Herleitung in Song [34]). Die kinematischen Variablen sind in Abbildung 3.2 skizziert.

Die Verschiebungen des Querschnitts setzen sich aus einer Starrkörperbewegung und einer Verwölbung zusammen. Die Starrkörperbewegung bezeichnet die Verschiebung und Rotation der kompletten Querschnittsebene. u_0 , v_0 und w_0 sind die Verschiebungen der Querschnittsebene in x -, y - und z -Richtung; Θ_x , Θ_y und ϕ die Drehung der Querschnittsebene um die x -, y - und z -Achse.

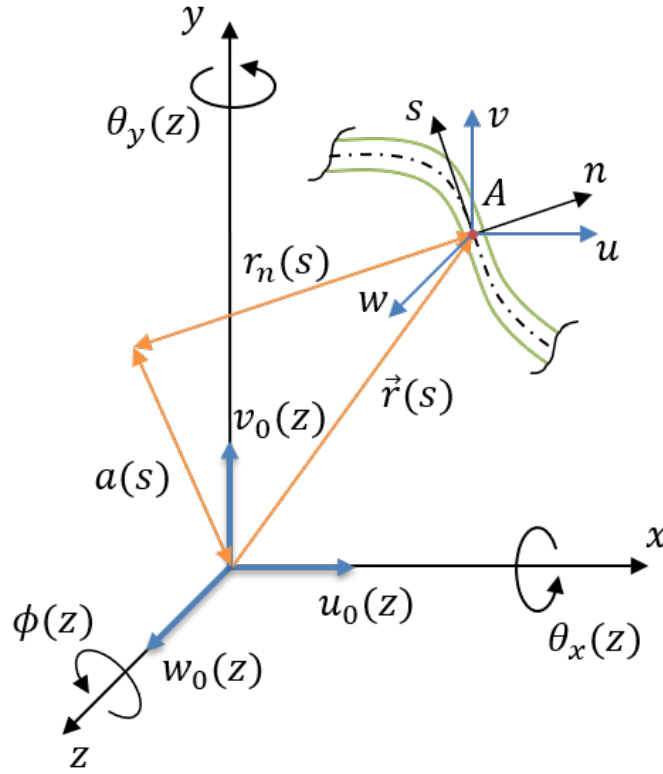


Abbildung 3.2.: Verschiebungsfeld des Balkens [34]

Es ergeben sich folgende Verschiebungen aus den Querschnitts-Verformungen für jeden Punkt des Balkens:

$$u(z, s) = u_0(z) - y(s)\phi(z) \quad (3.1)$$

$$v(z, s) = v_0(z) + x(s)\phi(z) \quad (3.2)$$

$$w(z, s, n) = w_0(z) + \Theta_x(z) \left[y(s) - n \frac{dx}{ds} \right] - \Theta_y(z) \left[x(s) + n \frac{dy}{ds} \right] \quad (3.3)$$

x und y sind die Koordinaten eines Punktes auf der Kontur-Mittellinie und somit eine Funktion der Konturkoordinate s .

Die axiale Dehnung ε_{zz} kann in zwei Anteile unterteilt werden. Der erste ist unabhängig von der Konturdickenkoordinate (ε_{zz}^0), der zweite Anteil ist abhängig von der Konturdickenkoordinate und stellt die Krümmung der Kontur um die s -Achse dar ($n\kappa_{zz}$):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}(s, z, n) &= \frac{\partial w(z, s, n)}{\partial z} \\ &= \varepsilon_{zz}^0(s, z) + n\kappa_{zz}(s, z) \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit

$$\varepsilon_{zz}^0(s, z) = w_0'(z) - \Theta_y'(z)x(s) + \Theta_x'(z)y(s) \quad (3.5)$$

$$\kappa_{zz}(s, z) = -\Theta_y'(z)\frac{dy}{ds} - \Theta_x'(z)\frac{dx}{ds} \quad (3.6)$$

Die Scherung in der x - z - und der y - z -Ebene wird vereinfacht als konstant über dem Querschnitt angenommen. In Abbildung 3.3 ist die tatsächliche Verwölbung des Querschnitts unter Querkraft dargestellt und die Verwölbung, die einer konstanten Scherung entspricht. Die Annahme der konstanten Scherung wird auch als Schubtheorie erster Ordnung bezeichnet („Timoschenko-Balken“). [12]. Somit errechnet sich die Scherung der Querschnittsebene zu:

$$\gamma_{xz}(z) = \Theta_y(z) + u_0'(z) \quad (3.7)$$

$$\gamma_{yz}(z) = \Theta_x(z) + v_0'(z) \quad (3.8)$$

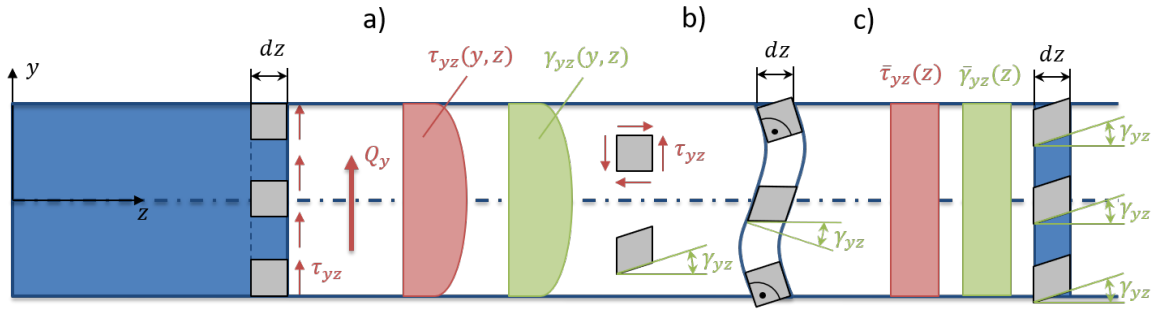


Abbildung 3.3.: Einfluss der Querkraft: a) nichtlinearer Verlauf von Schubspannung und Scherung, b) tatsächliche Verwölbung des Querschnitts, c) Näherung für Schubspannung und Scherung nach Timoschenko [40]

Daraus ergibt sich die Scherung in Konturdickenrichtung (transversale Scherung) zu

$$\gamma_{nz}(s, z) = \gamma_{xz}(z)\frac{dy}{ds} + \gamma_{yz}(z)\frac{dx}{ds} \quad (3.9)$$

und die Scherung in Konturrichtung (Membran-Scherung) zu

$$\begin{aligned} \gamma_{sz}(s, z) &= \gamma_{sz}^0(s, z) + \gamma_{sz}^t(s, z) \\ &= \gamma_{sz}^0(s, z) + \psi(s)\phi'(z) \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit

$$\gamma_{sz}^0(s, z) = \gamma_{xz}(z)\frac{dx}{ds} + \gamma_{yz}(z)\frac{dy}{ds} \quad (3.11)$$

Dabei ist γ_{sz}^0 der Anteil aus Biegung und Querkraft und γ_{sz}^t resultiert aus Torsion. ψ stellt die Torsionsfunktion dar, die für mehrzellige geschlossene Querschnitte in Abschnitt 3.2 hergeleitet wird.

Somit ergeben sich sechs unabhängige Variablen, mit denen die Verformung des Querschnitts beschrieben werden kann (Freiheitsgrade des Querschnitts):

- Längsdehnung in z -Richtung (w_0')
- Scherung in der x - z - und der y - z -Ebene (γ_{xz} und γ_{yz})
- Krümmung um die x - und y -Achse (Θ'_x und Θ'_y)
- Verdrillung um die z -Achse (ϕ')

3.1.2. Materialverhalten

Angelehnt an die CLT wird davon ausgegangen, dass die Kontur in Dickenrichtung aus unterschiedlichen Schichten besteht (siehe Abbildung 3.4).

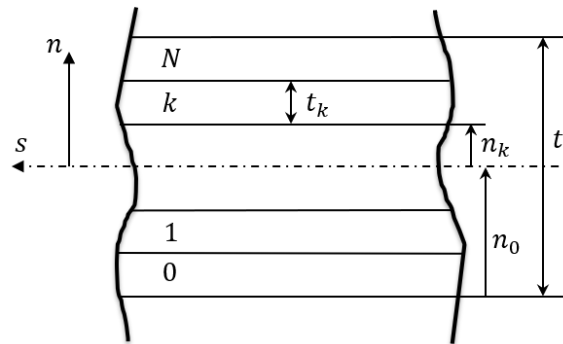


Abbildung 3.4.: Geometrie eines Laminats mit N Schichten

Verhalten einer Laminatschicht

Jede Schicht des Laminats verhält sich orthotrop und linear elastisch. Die Spannungen an einem Volumenelement einer Schicht sind in Abbildung 3.5 dargestellt. Das (1, 2, 3)-Koordinatensystem wird als Schicht-Koordinatensystem bezeichnet.

Wird davon ausgegangen, dass die 1- und 2-Achse des Schicht-Koordinatensystems den Orthotropie-Achsen entsprechen, besteht folgender Zusammenhang zwischen Deh-

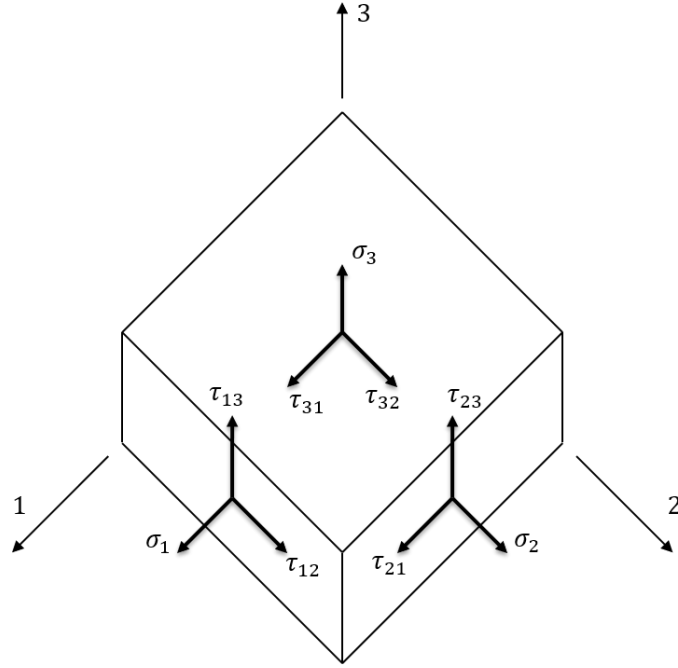


Abbildung 3.5.: Spannungen in einer Laminatschicht

nungen und Spannungen einer Schicht:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Die Matrix \mathbf{G} wird als Schicht-Nachgiebigkeitsmatrix bezeichnet. Zusätzlich gilt:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j \quad (3.13)$$

Somit ist \mathbf{G} symmetrisch und es sind 9 unabhängige Variablen zur Beschreibung des Materialverhaltens einer Schicht notwendig: $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}, G_{31}, G_{23}$.

Die Spannungen können aus den Dehnungen mit der ebenfalls symmetrischen Schicht-Steifigkeitsmatrix \mathbf{H} berechnet werden, die der Inversen der Schicht-Nachgiebigkeitsmatrix entspricht:

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}^{-1} \quad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \tau_{23} & \tau_{31} & \tau_{12} \end{pmatrix}^T = \mathbf{H} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \gamma_{23} & \gamma_{31} & \gamma_{12} \end{pmatrix}^T \quad (3.15)$$

Da keine Behinderung der Querkontraktion in Dickenrichtung (3-Richtung) zu erwarten ist, wird im weiteren Verlauf angenommen, dass die Spannung in Dickenrichtung σ_3 zu Null wird. Damit berechnet sich die Dehnung in Dickenrichtung ε_3 zu

$$\varepsilon_3 = -\frac{H_{13}\varepsilon_1 + H_{23}\varepsilon_2}{H_{33}} \quad (3.16)$$

Das Materialverhalten einer Schicht lässt sich nun vereinfacht mit der reduzierten Schicht-Steifigkeitsmatrix \mathbf{Q} schreiben:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Transformation der Eigenschaften einer Laminatschicht vom Schicht- ins Laminatkoordinatensystem

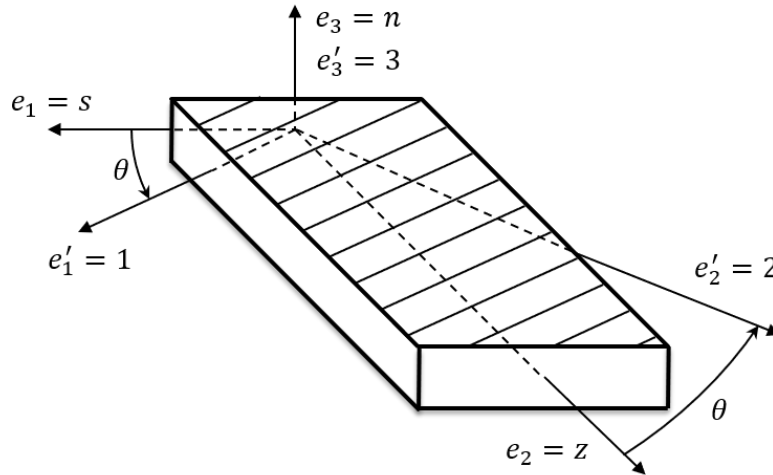


Abbildung 3.6.: Schicht- und Laminat- bzw. Kontur-Koordinatensystem mit Rotationswinkel Θ [34]

Da die Schichten des Laminats um die Dickenrichtung (n - bzw. 3-Achse) rotiert werden können, muss eine Transformation der Laminat-Steifigkeitsmatrix durchgeführt werden, um die Steifigkeit im Laminat- bzw. Kontur-Koordinatensystem (s, z, n) zu erhalten. Der Rotationswinkel wird als Θ bezeichnet und ist wie in Abbildung 3.6 definiert. Es ist zu beachten, dass bei einem Winkel von 0° die 1-Richtung nicht, wie vielleicht instinktiv angenommen, in Balkenlängsrichtung zeigt, sondern in Balkenum-

fangsrichtung. Werden die Spannungen und Dehnungen vom Laminat- ins Schichtkoordinatensystem transformiert, gilt:

$$\vec{\sigma}' = \mathbf{T} \vec{\sigma} \quad (3.18)$$

$$\vec{\varepsilon}' = \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1} \vec{\varepsilon} \quad (3.19)$$

mit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \Theta & \sin^2 \Theta & 0 & 0 & 0 & 2 \cos \Theta \sin \Theta \\ \sin^2 \Theta & \cos^2 \Theta & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \Theta \sin \Theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ -\cos \Theta \sin \Theta & \cos \Theta \sin \Theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

und

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

und

$$\vec{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{nz} \\ \sigma_{sn} \\ \sigma_{sz} \end{pmatrix} \quad \vec{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{nn} \\ \gamma_{zn} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{sz} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Die Matrix \mathbf{R} dient dazu, die Scherungen, die in (3.17) als ingenieurmäßige Scherungen γ_{ij} vorliegen, in die Scherungen als Verzerrungstensor-Komponenten ε_{ij} umzurechnen. Dabei gilt folgender Zusammenhang: $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$

Für die Steifigkeit im Laminatkoordinatensystem kann man nun schreiben:

$$\vec{\sigma} = \overline{\mathbf{Q}} \vec{\varepsilon} \quad (3.23)$$

wobei $\bar{\mathbf{Q}}$ die reduzierte Schicht-Steifigkeitsmatrix im Laminat-Koordinatensystem ist:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1} \quad (3.24)$$

$\bar{\mathbf{Q}}$ kann aufgeteilt werden in eine Untermatrix, die der CLT entspricht (Index c) und in eine Untermatrix, die der Erweiterung um transversalen Schub entspricht (Index t):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{sz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{sz} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{Q}}_c \begin{pmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{sz} \end{pmatrix} \quad (3.25a)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nz} \\ \sigma_{sn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{zn} \\ \gamma_{sn} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{Q}}_t \begin{pmatrix} \gamma_{zn} \\ \gamma_{sn} \end{pmatrix} \quad (3.25b)$$

Verhalten des Laminats

Entsprechend der CLT wird angenommen, dass ein Laminat-Element Scheiben- und Plattenbeanspruchung ausgesetzt werden kann. Daraus resultiert eine lineare Verzerrungsverteilung für ε_{zz} , ε_{ss} und γ_{sz} über der Dicke des Laminats. Zusätzlich wird angenommen, dass $\kappa_{sz} = 0$ und $\kappa_{ss} = 0$ sind. Es ergibt sich somit für die Verzerrungen in der Laminebene:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{sz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ss}^0 \\ \varepsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{sz}^0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \kappa_{ss} \\ \kappa_{zz} \\ \kappa_{sz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{zz}^0 + n\kappa_{zz} \\ \gamma_{sz} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Außerdem wird angenommen, dass γ_{zn} konstant über der Dicke des Laminats ist und die Scherung in der s - n -Ebene vernachlässigbar klein ist ($\gamma_{sn} = 0$).

Werden die so ermittelten Verzerrungen in die Gleichungen für das Materialverhalten einer Schicht (3.25) eingesetzt, ergeben sich für jede Schicht k des Laminats folgende Spannungen:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{sz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{ss}^0 \\ \varepsilon_{zz}^0 + n\kappa_{zz} \\ \gamma_{sz}^0 \end{pmatrix} = (\bar{\mathbf{Q}}_c)_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{ss}^0 \\ \varepsilon_{zz}^0 + n\kappa_{zz} \\ \gamma_{sz}^0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nz} \\ \sigma_{sn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \gamma_{zn} \\ 0 \end{pmatrix} = (\bar{\mathbf{Q}}_t)_k \begin{pmatrix} \gamma_{zn} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Werden die Spannungen an einem Laminat-Element in Dickenrichtung über alle N Schichten integriert, erhält man die Schnittkraftflüsse und Schnittmomentenflüsse

des Laminat-Elements (siehe Abbildung 3.7). Diese zeichnen sich dadurch aus, dass keine Abhängigkeit mehr von der Dickenkoordinate n besteht. Die Schnittkraftflüsse und Schnittmomentenflüsse sind nur noch von der Konturkoordinate s und der Balkenlängskoordinate z abhängig.

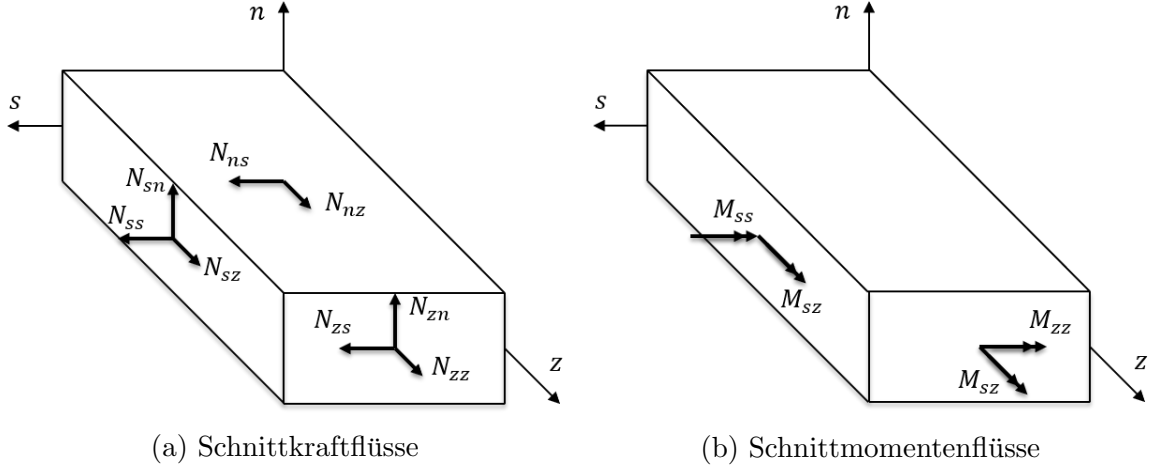


Abbildung 3.7.: Schnittkraftflüsse und Schnittmomentenflüsse [8]

Unter der Bedingung kleiner Krümmungen der Konturmittellinie berechnen sich die Schnittkraftflüsse zu

$$\begin{pmatrix} N_{ss} \\ N_{zz} \\ N_{nz} \\ N_{sn} \\ N_{sz} \end{pmatrix} = \int_t \begin{pmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{nz} \\ \sigma_{sn} \\ \sigma_{sz} \end{pmatrix}_k dn = \sum_{k=1}^N \int_{n_{k-1}}^{n_k} \begin{pmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{nz} \\ \sigma_{sn} \\ \sigma_{sz} \end{pmatrix}_k dn \quad (3.29)$$

sowie die Schnittmomentenflüsse zu

$$\begin{pmatrix} M_{zz} \\ M_{sz} \end{pmatrix} = \int_t \begin{pmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{sz} \end{pmatrix}_k n dn = \sum_{k=1}^N \int_{n_{k-1}}^{n_k} \begin{pmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{sz} \end{pmatrix}_k n dn \quad (3.30)$$

Werden nun (3.27) und (3.28) in (3.29) eingesetzt, ergeben sich mit der Scheiben-Steifigkeitsmatrix \mathbf{A} , der Platten-Steifigkeitsmatrix \mathbf{D} und der Koppel-Steifigkeitsmatrix \mathbf{B}

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{n_{k-1}}^{n_k} (\bar{Q}_{ij})_k dn \quad (3.31)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{n_{k-1}}^{n_k} (\bar{Q}_{ij})_k n dn \quad (3.32)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{n_{k-1}}^{n_k} (\bar{Q}_{ij})_k n^2 dn \quad (3.33)$$

die Schnittkraftflüsse zu

$$\begin{pmatrix} N_{ss} \\ N_{zz} \\ N_{nz} \\ N_{sn} \\ N_{sz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{16} & B_{12} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & A_{26} & B_{22} \\ 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{45} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & 0 & A_{66} & B_{26} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{nz} \\ \gamma_{sz} \\ \kappa_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Mit der Bedingung, dass der Kraftfluss in Umfangsrichtung vernachlässigbar klein ist ($N_{ss} = 0$), ergibt sich die Umfangsdehnung zu

$$\varepsilon_{ss} = -\frac{A_{12}\varepsilon_{zz}^0 + A_{16}\gamma_{sz} + B_{12}\kappa_{zz}}{A_{11}} \quad (3.35)$$

Mit (3.35) in (3.34) eingesetzt fällt die Gleichung für die Umfangsspannung weg und es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} N_{zz} \\ N_{sz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{sz} \\ \kappa_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

$$N_{nz} = A_{44}\gamma_{nz} \quad (3.37)$$

$$N_{sn} = A_{45}\gamma_{nz} \quad (3.38)$$

Die Koeffizienten K_{ij} finden sich im Anhang A.

Um die Schnittmomentenflüsse zu berechnen wird analog vorgegangen und (3.25a) in (3.30) eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} M_{zz} \\ M_{sz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{22} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{26} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{sz} \\ \kappa_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Geht man wieder von vernachlässigbaren Umfangsspannungen aus, ergibt sich mit (3.35):

$$\begin{pmatrix} M_{zz} \\ M_{sz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{41} & K_{42} & K_{43} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{sz} \\ \kappa_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Die Koeffizienten K_{ij} finden sich ebenfalls im Anhang A.

Fasst man nun die Gleichungen (3.36), (3.37), (3.38) und (3.40) zusammen, erhält

man für das endgültige Materialverhalten:

$$\begin{pmatrix} N_{zz} \\ N_{sz} \\ M_{zz} \\ M_{sz} \\ N_{nz} \\ N_{sn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & 0 \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{sz} \\ \kappa_{zz} \\ \gamma_{nz} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

3.1.3. Herleitung der Querschnittssteifigkeit

Die Querschnittssteifigkeit wird mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit hergeleitet (vgl. Qin und Librescu [29]). Für ein stationäres Problem gilt, dass die virtuelle Formänderungsenergie δU der virtuellen Arbeit durch externe Kräfte δW entsprechen muss:

$$\delta U = \delta W \quad (3.42)$$

Die Formänderungsenergie des Balkens wird mit den Schnittkraftflüssen und den Schnittmomentenflüssen zu

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \oint_C [N_{zz}\varepsilon_{zz}^0 + N_{sz}\gamma_{sz} + N_{nz}\gamma_{nz} + M_{zz}\kappa_{zz}] ds dz \quad (3.43)$$

berechnet und die virtuelle Arbeit durch externe Kräfte zu

$$\begin{aligned} \delta W = & \frac{1}{2} \int_0^L [f_x(z)\delta u_0(z) + f_y(z)\delta v_0(z) + f_z(z)\delta w_0(z) \\ & + m_x(z)\delta\Theta_x(z) + m_y(z)\delta\Theta_y(z) + m_z(z)\delta\phi(z)] dz \\ & + \frac{1}{2} [\tilde{F}_x\delta u_0 + \tilde{F}_y\delta v_0 + \tilde{F}_z\delta w_0 + \tilde{M}_x\delta\Theta_x + \tilde{M}_y\delta\Theta_y + \tilde{M}_z\delta\phi]_0^L \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dabei sind f_x , f_y und f_z die Streckenlasten entlang der Balkenachse in x -, y - und z -Richtung, m_x , m_y und m_z sind die Streckenmomente entlang der Balkenachse um die x -, y - und z -Achse. Die mit einer Tilde gekennzeichneten Größen entsprechen den Schnittlasten an den Balkenenden. Nach dem Einsetzen der kinematischen Gleichungen in (3.43) erhält man folgende DGLen für die Querschnitts-Schnittlasten:

$$\delta u_0 : F'_x + f_x = 0 \quad (3.45a)$$

$$\delta v_0 : F'_y + f_y = 0 \quad (3.45b)$$

$$\delta w_0 : F'_z + f_z = 0 \quad (3.45c)$$

$$\delta \Theta_x : M'_x + F_x + m_x = 0 \quad (3.45d)$$

$$\delta \Theta_y : M'_y - F_y + m_y = 0 \quad (3.45e)$$

$$\delta \phi : M'_z + m_z = 0 \quad (3.45f)$$

Die Querschnitts-Schnittlasten ergeben sich dabei zu:

$$F_x(z) = \int_C [N_{sz} \frac{dx}{ds} + N_{nz} \frac{dy}{ds}] ds \quad (3.46a)$$

$$F_y(z) = \int_C [N_{sz} \frac{dy}{ds} - N_{nz} \frac{dx}{ds}] ds \quad (3.46b)$$

$$F_z(z) = \int_C N_{zz} ds \quad (3.46c)$$

$$M_x(z) = \int_C [y N_{zz} - L_{zz} \frac{dx}{ds}] ds \quad (3.46d)$$

$$M_y(z) = \int_C [x N_{zz} + L_{zz} \frac{dy}{ds}] ds \quad (3.46e)$$

$$M_z(z) = \int_C N_{sz} \psi ds \quad (3.46f)$$

Dabei ist F_z die Normalkraft, F_x und F_y die Querkräfte, M_x und M_y die Biegemomente und M_z das Torsionsmoment. Die Normalkraft greift im Ursprung des Querschnitts-Koordinatensystems an, wo auch die Biegeverformungen ihren Drehpol haben. Der Angriffspunkt der Querkräfte und der Drehpol der Verdrehung ist der (noch nicht bekannte) Schubmittelpunkt. Die Querschnitts-Schnittlasten mit ihren Angriffspunkten sind in Abbildung 3.8 dargestellt.

Werden die Gleichungen für das Materialverhalten und die Kinematik in (3.46) eingesetzt, können die Querschnitts-Schnittlasten in Abhängigkeit der Querschnitts-Verformungen berechnet werden. Diesen Zusammenhang beschreibt die Querschnitts-Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} . Diese ist symmetrisch, die Koeffizienten finden sich in Anhang B.

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ w'_0 \\ \Theta'_x \\ \Theta'_y \\ \phi' \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ w'_0 \\ \Theta'_x \\ \Theta'_y \\ \phi' \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

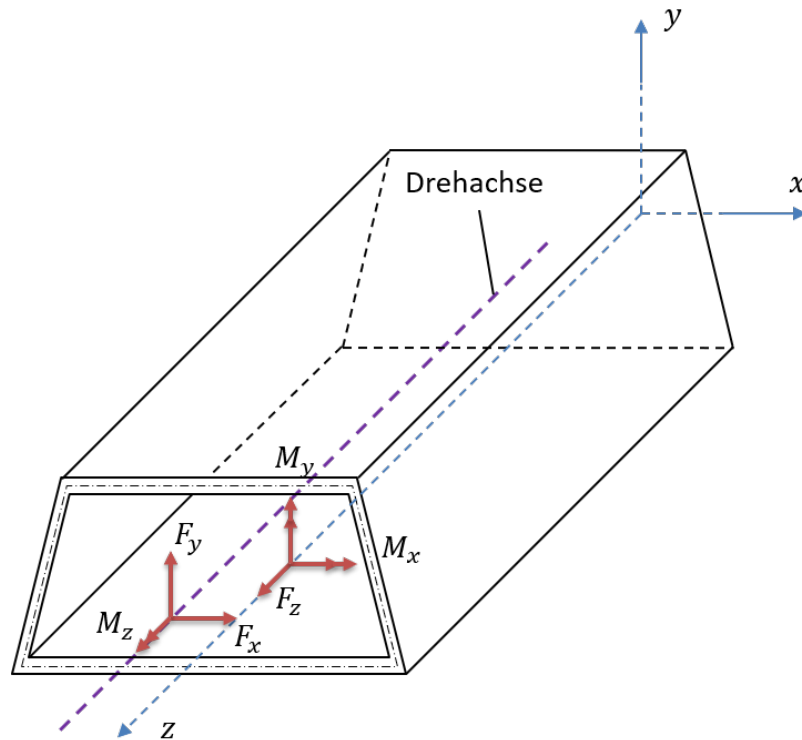


Abbildung 3.8.: Schnittlasten mit Angriffspunkten an einem Querschnitt

Die Querschnitts-Nachgiebigkeitsmatrix entspricht der invertierten Querschnitts-StEIFIGKEITSMATRIX. Damit gilt

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & w'_0 & \Theta'_x & \Theta'_y & \phi' \end{pmatrix}^T = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z & M_x & M_y & M_z \end{pmatrix}^T \quad (3.48)$$

3.1.4. Lokale Dehnungen und Spannungen in der Kontur

Die Dehnungen und Spannungen in der Kontur errechnen sich aus den Querschnitts-Verformungen $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, w'_0, \Theta'_x, \Theta'_y, \phi')$. Die Verformungen der Kontur $(\varepsilon_{zz}^0, \gamma_{sz}, \kappa_{zz}, \gamma_{nz})$ werden aus den Querschnitts-Verformungen mit den kinematischen Gleichungen berechnet. Aus diesen wiederum können entweder mit (3.41) die Schnittkraftflüsse und die Schnittmomentenflüsse an jeder Stelle der Kontur berechnet werden oder mit (3.25) die Spannungen in den einzelnen Schichten des Laminats bestimmt werden.

3.2. Erweiterung des Ansatzes nach Song für beliebige mehrzellige Querschnitte

In Abschnitt 3.1.1 werden alle Gleichungen angegeben, um von einer bekannten Querschnitts-Verformung auf die Verformungen der Kontur zu gelangen. Einzig die Torsionsfunktion $\psi(s)$ wurde noch nicht bestimmt. Sie beschreibt, wie stark die Membran-

Scherung der Kontur durch Torsion abhängig von der Verdrillung ist $(\gamma_{sz}^t(s, z) = \psi(s)\phi'(z))$. Song [34] stellt eine Methode vor, wie die Torsionsfunktion für mehrzellige Querschnitte bestimmt werden kann. Allerdings trifft er die Annahme, dass alle Zellen des mehrzelligen Querschnitts in einer Reihe nebeneinander liegen müssen (Abbildung 3.9a). In diesem Abschnitt wird der Ansatz nach Song [34] auf beliebige mehrzellige geschlossene Querschnitte erweitert (z.B. Abbildung 3.9b), um die Torsionsfunktion für die Kontur bestimmen zu können.

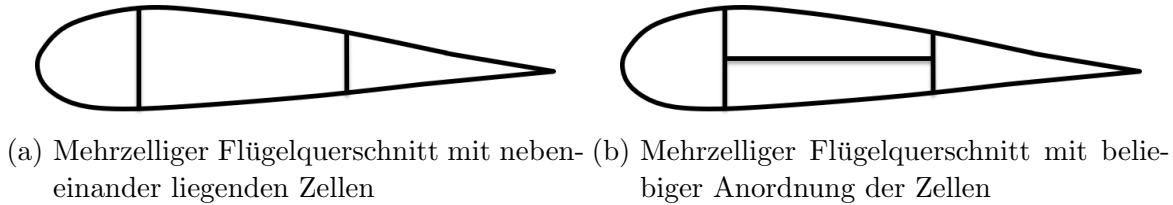


Abbildung 3.9.: Mehrzellige Flügelquerschnitte

Die Analyse eines mehrzelligen geschlossenen Querschnitts im Bezug auf Torsion stellt ein innerlich statisch unbestimmtes Problem dar. [41] Es wird ein dünnwandiger Querschnitt aus m geschlossenen Zellen betrachtet, aufgrund der statischen Unbestimmtheit für jede Zelle ein umlaufender Schubfluss $N_{sz,0,j}$ eingeführt (Zellenindex j , siehe Abbildung 3.10).

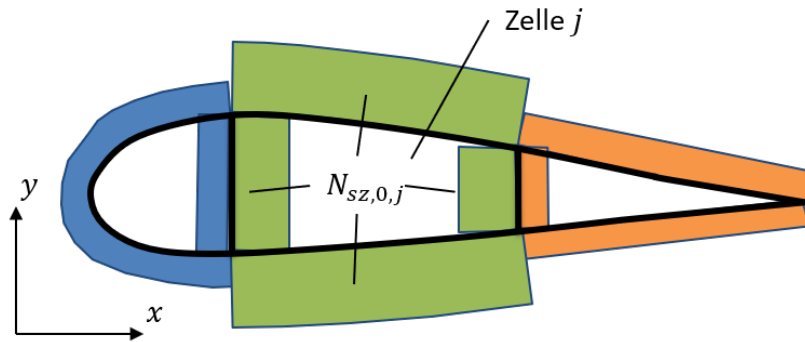


Abbildung 3.10.: Umlaufender Schubfluss pro Zelle aus Torsion

Wird unbehinderte Verwölbung angenommen, ergibt sich für die Kinematik jeder Zelle unter Torsionsbelastung:

$$\oint_j \gamma_{sz}^t ds = \phi_j' \oint_j r_n(s) ds \quad (3.49)$$

$$= \phi_j' \cdot 2A_j \quad (3.50)$$

Damit lässt sich die Verdrillung für eine Zelle mit einem Ringintegral der Membran-

Scherung durch Torsion über die jeweilige Zelle zu

$$\phi'_j = \frac{1}{2A_j} \oint_j \gamma_{sz}^t ds \quad (3.51)$$

berechnen. Aus (3.41) lässt sich für das Materialverhalten bei reiner Torsion vereinfachen:

$$\begin{pmatrix} N_{zz} \\ N_{sz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{sz} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Da für Torsion ohne behinderte Verwölbung nach St. Venant keine Normalspannungen auftreten, lässt sich $N_{zz} = 0$ setzen. Es ergibt sich

$$\gamma_{sz}^t = \alpha N_{sz} \quad (3.53)$$

mit α als generelle Torsionsnachgiebigkeit der Kontur:

$$\alpha = \frac{1}{K_{22} - \frac{K_{12}^2}{K_{11}}} \quad (3.54)$$

Somit kann die Verdrillung einer Zelle berechnet werden, wenn alle Schubflüsse entlang der Kontur der Zelle bekannt sind:

$$\phi'_j = \frac{1}{2A_j} \oint_j \alpha N_{sz} ds \quad (3.55)$$

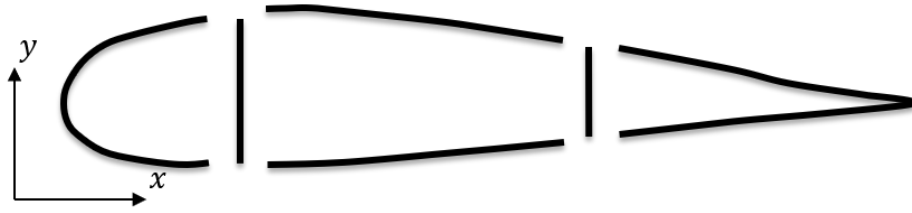
In den Kontur-Segmenten, die zu zwei Zellen gehören, überlagern sich die umlaufenden Schubflüsse der beiden Zellen (siehe Abbildung 3.11). Um die Verdrillung aller Zellen berechnen zu können, wird die Kontur in Segmente mit konstantem Schubfluss und konstanter Torsionssteifigkeit unterteilt. Der gesamte Querschnitt besteht aus n Segmenten, der Segmentindex ist i .

Für jedes Segment existiert eine Membran-Scherung γ_{sz}^t , die für alle Segmente im Scherungsvektor $\vec{\gamma}_{sz}^t$ zusammengefasst werden. Analog zum Scherungsvektor werden der Torsionsnachgiebigkeitsvektor $\vec{\alpha}$, der Schubflussvektor \vec{N}_{sz} und der Segmentlängenvektor \vec{l} definiert. Jedes Segment besitzt eine eindeutige Richtung. Fließt der Schubfluss in einem Segment in diese „Segment-Richtung“, ist er positiv, läuft er entgegengesetzt der Segment-Richtung, ist er negativ (siehe Abbildung 3.12).

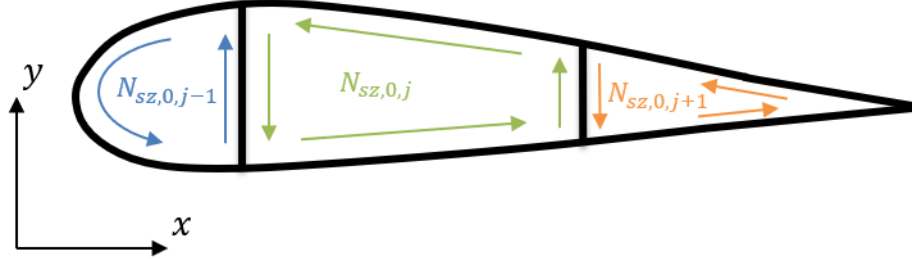
Damit lassen sich die Gleichungen zur Verdrillung einer Zelle mit

$$\vec{\gamma}_{sz}^t = \vec{\alpha} \circ \vec{N}_{sz} \quad (3.56)$$

umschreiben zu



(a) Aufteilung des Querschnitts in Segmente



(b) Überlagerung der Schubflüsse in den Segmenten, die zu zwei Zellen gehören (Holme)

Abbildung 3.11.: Schubflüsse in der Kontur

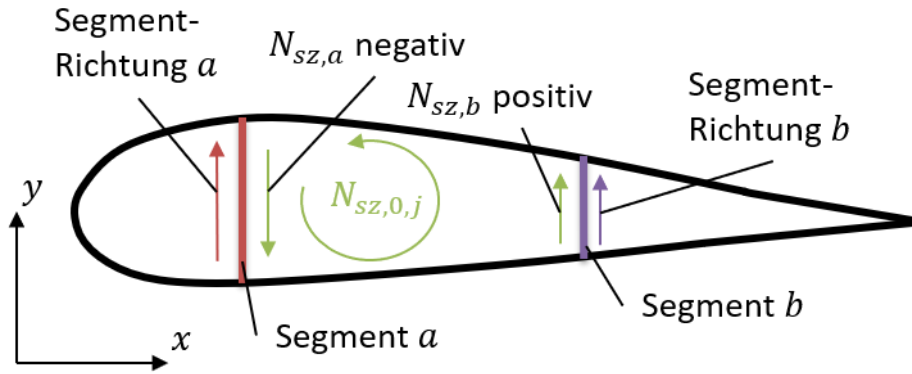


Abbildung 3.12.: Vorzeichendefinition der Schubflüsse

$$\phi'_j = \frac{1}{2A_j} \oint_j \alpha N_{sz} ds \quad (3.57)$$

$$= \frac{1}{2A_j} \sum_{i=0, i \in Z_j}^n \alpha_i N_{sz,i} l_i \quad (3.58)$$

$$= \frac{1}{2A_j} \left[\vec{M}_j \left(\vec{\alpha} \circ \vec{N}_{sz} \circ \vec{l} \right) \right] \quad (3.59)$$

\circ ist der Operator für das Schur-Produkt, der komponentenweisen Multiplikation zweier Vektoren. Z_j entspricht der Menge der Segmentindizes, die zur j -ten Zelle gehören. \vec{M}_j ist ein Zuordnungsvektor der Segmente zu den Zellen. Dabei wird auch die Richtung des umlaufenden Schubflusses einer Zelle berücksichtigt. Fasst man die Zuordnungsvektoren aller Zellen zu einer Matrix zusammen, erhält man die Zuord-

nungsmatrix \mathbf{M} , die wie folgt definiert ist:

$$\mathbf{M}_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{falls Segment } i \text{ in Zelle } j \text{ liegt und Segment- und Zellenumlaufrihtung identisch sind} \\ -1 & \text{falls Segment } i \text{ in Zelle } j \text{ liegt und Segment- und Zellenumlaufrihtung gegenläufig sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.60)$$

Fasst man die Verdrillungen aller Zellen in einem Vektor $\vec{\phi}'$ zusammen und geht davon aus, dass die Verdrillung in allen Zellen identisch ist, erhält man

$$\vec{\phi}' = \phi' \vec{1} \quad (3.61)$$

wobei $\vec{1}$ der Eins-Vektor ist. Mit (3.57) und \vec{A} als Zellenflächenvektor erhält man für alle Zellen:

$$2\phi' \vec{A} = \mathbf{M} \left(\vec{\alpha} \circ \vec{l} \circ \vec{N}_{sz} \right) \quad (3.62)$$

Ist \mathbf{L} eine Matrix mit den Werten von $\vec{\alpha} \circ \vec{l}$ auf den Diagonalelementen, lässt sich schreiben:

$$\vec{\alpha} \circ \vec{l} \circ \vec{N}_{sz} = \mathbf{L} \vec{N}_{sz} \quad (3.63)$$

und damit

$$2\phi' \vec{A} = \mathbf{M} \mathbf{L} \vec{N}_{sz} \quad (3.64)$$

Der resultierende Schubfluss eines Segments i setzt sich aus den überlagerten umlaufenden Schubflüssen $\vec{N}_{sz,0}$ der zugehörigen Zellen zusammen:

$$\vec{N}_{sz} = \mathbf{M}^T \vec{N}_{sz,0} \quad (3.65)$$

Wird (3.65) in (3.64) eingesetzt, erhält man

$$2\phi' \vec{A} = \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{M}^T \vec{N}_{sz,0} \quad (3.66)$$

Wird nun der Torsionsverteilungsvektor $\vec{\lambda}$ eingeführt, der den umlaufenden Schubfluss für jede Zelle pro Verdrillung des Querschnitts beschreibt, ergibt sich

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{\phi'} \vec{N}_{sz,0} \quad (3.67)$$

$$\Leftrightarrow \vec{N}_{sz,0} = \vec{\lambda} \phi' \quad (3.68)$$

(3.66) kann umgestellt und mit dem Torsionsverteilungsvektor geschrieben werden zu

$$2\vec{A} = \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{M}^T \left(\vec{N}_{sz,0} \frac{1}{\phi'} \right) \quad (3.69)$$

$$= \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{M}^T \vec{\lambda} \quad (3.70)$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann nun nach $\vec{\lambda}$ gelöst werden. Mit dem Torsionsverteilungsvektor kann der Schubflussvektor ausgedrückt werden als

$$\vec{N}_{sz} = \mathbf{M}^T \vec{\lambda} \phi' \quad (3.71)$$

und damit der Scherungsvektor als

$$\vec{\gamma}_{sz}^t = \vec{\alpha} \circ \left(\mathbf{M}^T \vec{\lambda} \phi' \right) = \vec{\alpha} \circ \left(\mathbf{M}^T \vec{\lambda} \right) \phi' \quad (3.72)$$

Der endgültige Torsionsfunktionsvektor $\vec{\psi}$, aus dem für jedes Segment der Wert der Torsionsfunktion ψ hervorgeht, ergibt sich somit zu:

$$\vec{\psi} = \vec{\alpha} \circ \left(\mathbf{M}^T \vec{\lambda} \right) \quad (3.73)$$

3.3. Berechnung des elastischen Schwerpunkts

Der elastische Schwerpunkt ist als der Punkt eines Querschnitts definiert, an dem eine angreifende Normalkraft keine Biegung verursacht. Liegt der Ursprung des Querschnitts-Koordinatensystems im elastischen Schwerpunkt, so werden die entsprechenden Koppel-Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix zu Null: $S_{34} = S_{35} = 0$. Zur Berechnung des elastischen Schwerpunkts wird das Querschnitts-Koordinatensystem in einen beliebigen Punkt P verschoben, siehe Abbildung 3.13. Damit gilt für das neue (x^*, y^*) -Koordinatensystem $x^* = x - x_P$ und $y^* = y - y_P$.

Es folgt aus der Bedingung für den ESP:

$$\begin{aligned} 0 = S_{34}^* &= \int_C K_{11} y^* - K_{13} \frac{dx^*}{ds} ds \\ &= \int_C K_{11} (y - y_P) - K_{13} \frac{dx}{ds} ds \end{aligned} \quad (3.74)$$

Da y_P konstant ist, kann es vor das Integral gezogen werden. Es ergibt sich für die

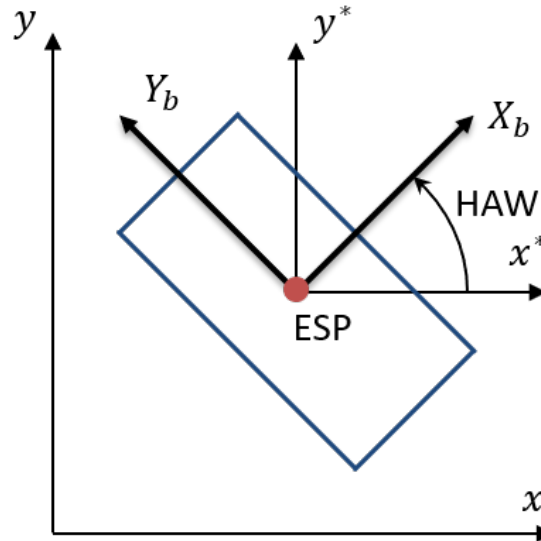


Abbildung 3.13.: Elastischer Schwerpunkt und Biege-Hauptachsen

y -Komponente des elastischen Schwerpunkts:

$$y_{ESP} = \frac{\int_C K_{11}y - K_{13} \frac{dx}{ds} ds}{\int_C K_{11} ds} = \frac{S_{34}}{S_{33}} \quad (3.75)$$

Analog dazu wird die x -Komponente des elastischen Schwerpunkts mit der Bedingung $S_{35}^* = 0$ berechnet:

$$x_{ESP} = \frac{\int_C K_{11}x + K_{13} \frac{dy}{ds} ds}{\int_C K_{11} ds} = -\frac{S_{35}}{S_{33}} \quad (3.76)$$

3.4. Berechnung der Biege-Hauptachsen

Im allgemeinen Fall sind die Biegung um die x - und y -Achse über das S_{45} -Element der Querschnitts-Steifigkeitsmatrix miteinander gekoppelt:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{44} & S_{45} \\ S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Theta'_x \\ \Theta'_y \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

Die Biege-Hauptachsen sind die beiden Achsen, bei denen die Biegung um die Achse ausschließlich auch eine Drehung um die Achse hervorruft. Die Biege-Hauptachsen entsprechen somit den Eigenvektoren des folgenden Eigenwertproblems:

$$\begin{bmatrix} S_{44} & S_{45} \\ S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} \vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (3.78)$$

Die Eigenvektoren entsprechen den Biege-Hauptachsen, die Eigenwerte entsprechen den Biegesteifigkeiten um die entsprechenden Hauptachsen. Die Biege-Hauptachsen werden mit X_b und Y_b bezeichnet, die X_b -Achse ist die Achse mit der größeren Biege-

steifigkeit, siehe Abbildung 3.13.

3.5. Berechnung der Querkraft-Hauptachsen

Wie auch die Biegung ist im allgemeinen Fall die Verformung durch Querkraft in x - und y -Achsenrichtung miteinander gekoppelt, und zwar durch das S_{12} -Element der Querschnitts-Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

Die beiden Achsen, entlang denen keine Kopplung der beiden Verformungen durch Querkraft auftritt, werden Querkraft-Hauptachsen genannt (siehe Abbildung 3.14). Diese entsprechen den Eigenvektoren des folgenden Eigenwertproblems:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (3.80)$$

Die Eigenwerte entsprechen den Schubsteifigkeiten entlang der entsprechenden Hauptachsen. Die Querkraft-Hauptachse mit der größeren Schubsteifigkeit wird mit X_s bezeichnet, die andere mit Y_s .

3.6. Berechnung des Schubmittelpunkts

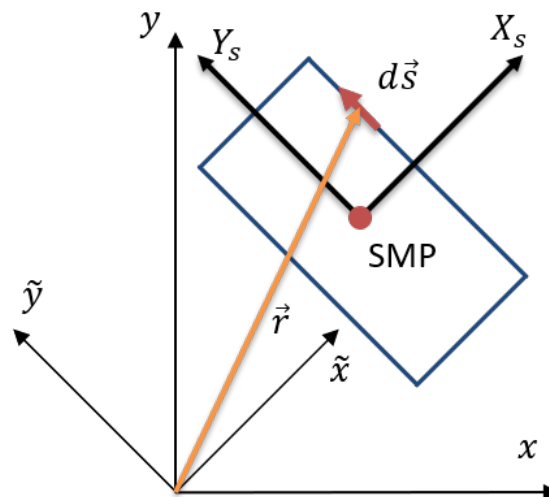


Abbildung 3.14.: Schubmittelpunkt des Querschnitts und Querkraft-Hauptachsensystem

Wird der Querschnitt mit einer Querkraft beaufschlagt, lässt sich die resultierende Schubflussverteilung wie in Abschnitt 3.1 berechnen. Diese Schubflüsse erzeugen ein

Torsionsmoment, der zugehörige Hebelarm ist r_n (siehe Abbildung 3.2). Das resultierende Torsionsmoment um den Ursprung des Querschnitts-Koordinatensystems lässt sich zu

$$M_z = \oint_C N_{sz}(\vec{r} \times \vec{ds})$$

berechnen.

Der SMP ist als der Punkt eines Querschnitts definiert, an dem eine angreifende Querkraft keine Verdrillung hervorruft [42]. Diese Bedingung ist gegeben, wenn das durch die Schubflüsse erzeugte Torsionsmoment M_z dem Moment entspricht, das die angreifende Querkraft um den Ursprung des Querschnitts-Koordinatensystems erzeugt. Um die Position des Schubmittelpunktes zu ermitteln, werden zwei Bedingungen aufgestellt, je eine für eine Querkraft in eine der beiden Querkraft-Hauptachsenrichtungen. $N_{sz,\tilde{x}}$ und $N_{sz,\tilde{y}}$ sind die durch die Querkraft hervorgerufenen Schubflüsse.

$$\oint_C N_{sz,\tilde{x}}(\vec{r} \times \vec{ds}) = -\tilde{y}_{SMP} Q_{\tilde{x}} \quad \oint_C N_{sz,\tilde{y}}(\vec{r} \times \vec{ds}) = -\tilde{x}_{SMP} Q_{\tilde{y}}$$

Daraus folgt für die Position des Schubmittelpunktes im \tilde{x} - \tilde{y} -Koordinatensystem:

$$\tilde{x}_{SMP} = \frac{\oint_C N_{sz,\tilde{y}}(\vec{r} \times \vec{ds})}{Q_{\tilde{y}}} \quad \tilde{y}_{SMP} = -\frac{\oint_C N_{sz,\tilde{x}}(\vec{r} \times \vec{ds})}{Q_{\tilde{x}}} \quad (3.81)$$

4. Aufbau der Software

Der Aufbau des Vorauslegungstools PreDoCS wurde bereits in Abschnitt 1.1 angesprochen. Im folgenden Kapitel wird näher auf die Umsetzung des in Kapitel 3 beschriebenen Ansatzes in der Software eingegangen.

4.1. Struktur und Ablauf der Berechnungen

Wie bereits in Abschnitt 1.1 beschrieben gliedert sich PreDoCS in drei Ebenen: die Flügel-Ebene, die Querschnitts-Ebene und die Laminat-Ebene. PreDoCS soll modular aufgebaut werden. Ein Modul stellt eine bestimmte Funktionalität bereit, beispielsweise die Berechnung der Lastfälle, die Querschnitt-Steifigkeitsberechnung oder die Festigkeitsanalyse. Vorteil eines modularen Aufbaus ist unter anderem die Austauschbarkeit der Module. So kann beispielsweise, wenn ein neuer Ansatz für die Berechnung der Querschnitt-Steifigkeiten verwendet werden soll, das bestehende Modul einfach durch das neue Modul ausgetauscht werden. Des Weiteren ist eine modular aufgebaute Software übersichtlicher, einfacher zu warten und Tests sind einfacher durchzuführen. Auch können bestehende Module in neuer Software wiederverwendet werden.

Modularität wird erreicht, indem klar abgegrenzte Funktionalitäten in Module gekapselt werden. Ein Modul besitzt dann nur noch wenige, fest definierte Abhängigkeiten zu anderen Modulen. Diese Abhängigkeiten werden auch als Schnittstellen bezeichnet und sind beispielhaft in Abbildung 4.1 dargestellt. Soll nun ein Modul durch ein anderes ersetzt werden, bleiben die Schnittstellen bestehen. Dadurch müssen Module nicht mehr angepasst werden, falls ein Modul, auf das sie sich beziehen, ersetzt werden sollte.

In Abbildung 4.2 sind die einzelnen PreDoCS-Module mit den zugehörigen Schnittstellen dargestellt. Zur Bewertung eines Flügels wird dieser in finite 1D-Balkenelemente diskretisiert. Da diese Balkenelemente Informationen über den Querschnitt benötigen, ist für jedes Balkenelement eine Querschnittsberechnung notwendig. Dazu wird aus der globalen 3D-Geometrie des Flügels mit entsprechendem Materialaufbau eine Querschnitts-Geometrie erzeugt. Um die Integrale aus Abschnitt 3.1.3 während der Steifigkeitsberechnung für beliebige Querschnitte lösen zu können, wird die Querschnitts-Geometrie in Elemente diskretisiert, Näheres in Abschnitt 4.2.

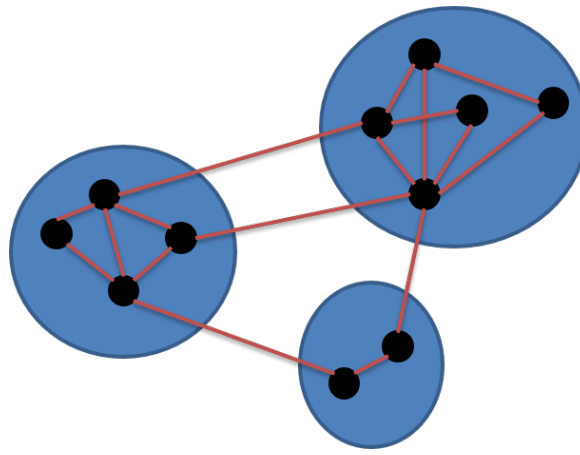


Abbildung 4.1.: Skizze von Modulen, die über Schnittstellen kommunizieren. Blau: Module, schwarz: Untermodule, rot: Abhängigkeiten

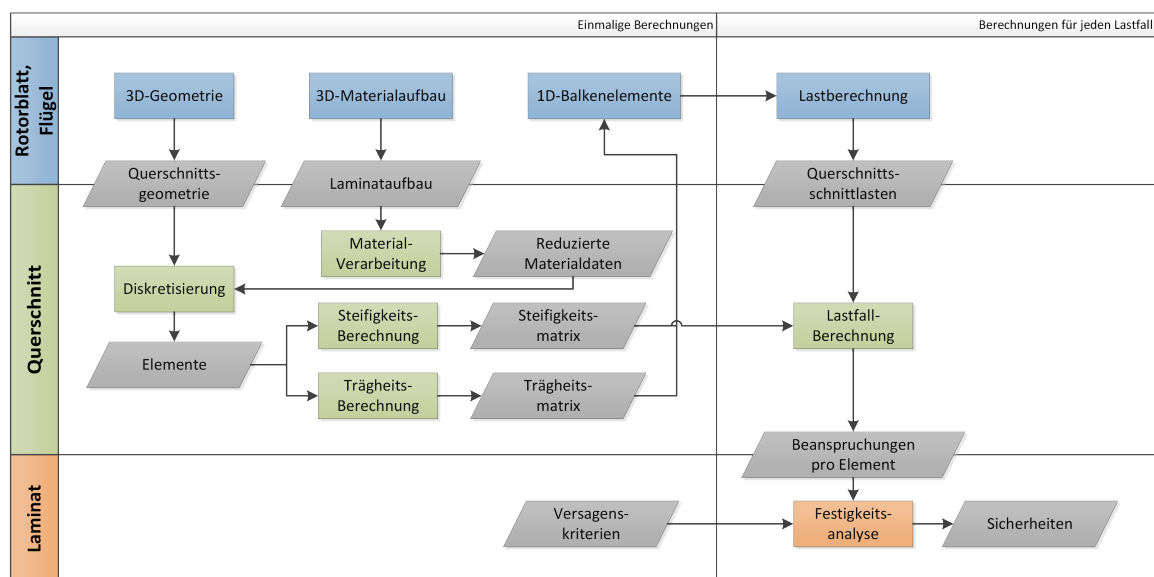


Abbildung 4.2.: Darstellung der Module (bunt) und den Schnittstellen (grau) von Pre-DoCS

Diese Elemente bekommen auch die benötigten Materialdaten zugewiesen, die zuvor berechnet wurden. Es wird in der Software zwischen „Material“ und „reduzierten Materialdaten“ unterschieden. Ein Material ist eine Beschreibung eines Materials. Ein isotropes Material wird z.B. durch seine Dicke und den Elastizitäts- und Schubmodul beschrieben, ein Faserverbund-Material durch den Laminataufbau und die mechanischen Eigenschaften der einzelnen Schichten. Die reduzierten Materialdaten entsprechen den Eingabedaten, die das entsprechende Querschnittsmodul benötigt. Basiert das Querschnittsmodul auf einem Ansatz, der isotropes Materialverhalten voraussetzt, werden hier nur die Materialdaten für ein isotropes Material übergeben (t , E , G). Wenn der Querschnitt aus isotropem Material aufgebaut ist, werden diese Daten einfach weitergegeben. Ist der Querschnitt aber aus einem Faserverbund-Material aufgebaut, müssen diese Materialkennwerte zunächst berechnet werden, siehe Ab-

schnitt 5.1.1.

Mit diesen Elementen können nun die Steifigkeits- und Trägheitsmatrizen berechnet werden, die als Eingabe für die 1D-Balkenelemente dienen. Damit können unter anderem statische Verformungen bestimmter Lastfälle berechnet oder das dynamische Verhalten des Flügels untersucht werden. Außerdem werden diese Daten für aeroelastische Analysen benötigt.

Für jeden Lastfall können so für jeden Querschnitt die Querschnittsverformungen bestimmt werden, entweder direkt als Ergebnis der 1D-FE-Berechnung oder mit der Querschnitts-Nachgiebigkeitsmatrix über die Querschnitts-Schnittlasten. Aus diesen Querschnittsverformungen kann mit der Kinematik und dem Materialverhalten die Beanspruchung (Dehnungen und Spannungen) in jedem Element des Querschnitts bestimmt werden. Anhand dieser Beanspruchungen kann nun auf der Laminat-Ebene unter Anwendung von Versagenskriterien eine Aussage über die Festigkeit des Flügels an dieser Stelle unter diesem Lastfall getroffen werden.

In Abbildung 4.3 ist der Ablauf der Querschnitts-Berechnungen detailliert zu sehen.

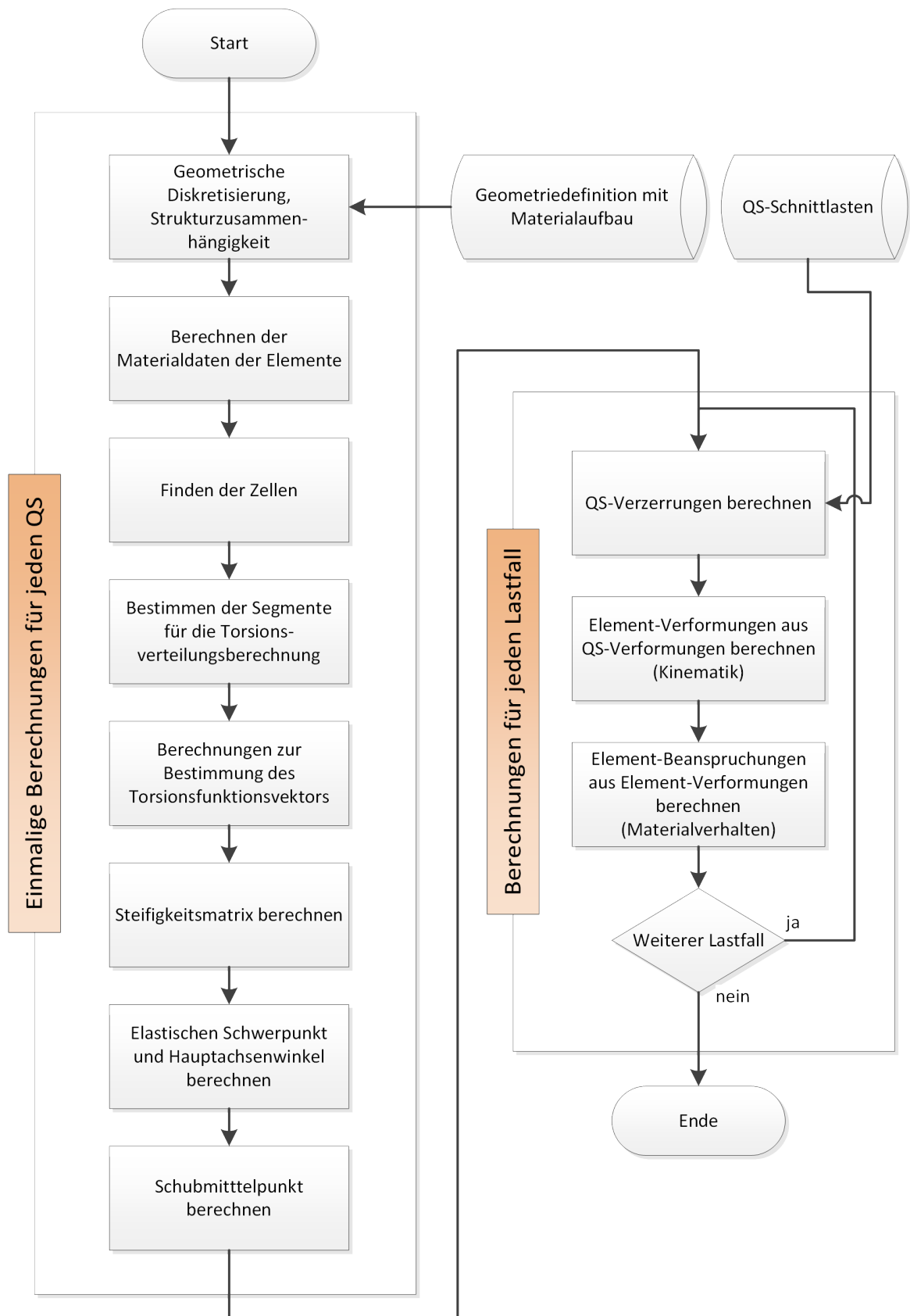


Abbildung 4.3.: Ablaufdiagramm der PreDoCS-Querschnittsberechnung

4.2. Elementierung der Querschnittskontur

Die Kontur des Querschnitts wird aus Rechteck-Elementen aufgebaut. Dabei sei darauf hingewiesen, dass diese Elementierung der Kontur ausschließlich dazu dient, die Geometrie abzubilden. Diese Elemente sind keine Finiten Elemente im Sinne der Finite Element Methode (FEM).

Ein Rechteckelement wird durch zwei Element-Knoten und seine Dicke eindeutig definiert. Die Element-Knoten definieren die Mittellinie des Elements, die Element-Längsrichtung ist wie in Abbildung 4.4 dargestellt von Knoten 1 zu Knoten 2 definiert.

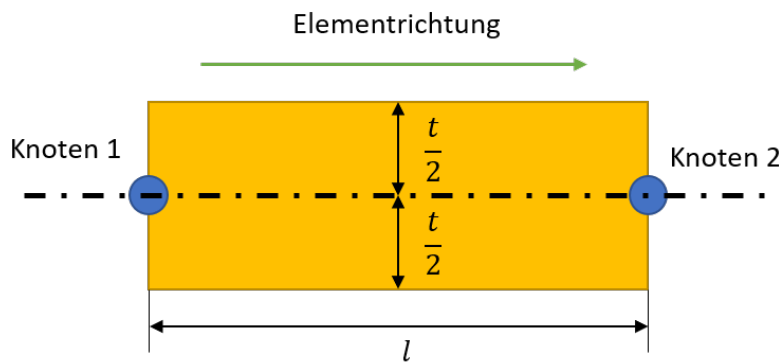


Abbildung 4.4.: Ein Element der Kontur

Um die Kontur besser mit den Elementen abbilden zu können, ist es von Vorteil, wenn sich die Element-Knoten zweier nebeneinander liegender Elemente nicht zwangsläufig an der selben Position befinden müssen. Dies wird in Abbildung 4.5 an dem Beispiel einer Dickenänderung und einer Verzweigung der Kontur gezeigt. Dadurch ist es möglich, dass die Konturmittellinie Sprünge aufweisen kann. Um trotzdem die Zusammenhängigkeit der Elemente beschreiben zu können, werden Struktur-Knoten eingeführt. Ein Struktur-Knoten besitzt keine Position, er beschreibt nur die Zusammengehörigkeit mehrerer Element-Knoten, siehe Abbildung 4.5.

4.2.1. Ablauf der Elementierung

Die Elementierung beginnt mit einer gegebenen Kontur, die elementiert werden soll und folgt dem Ablauf in Abbildung 4.6.

Um die spätere Position der Struktur-Knoten zu bestimmen, werden zunächst „feste Kontur-Knoten“ an den Stellen gesetzt, wo später zwingend ein Struktur-Knoten liegen muss. Dazu gehören Stellen, an denen sich das Material ändert und Verzweigungen und Knicke der Kontur. Auf den Strecken zwischen diesen festen Kontur-Knoten werden die „flexiblen Kontur-Knoten“ verteilt. Diese Verteilung kann entweder im gleichen Abstand entsprechend einer durchschnittlichen Elementlänge geschehen oder es kann zusätzlich die Krümmung berücksichtigt werden, damit stärker gekrümmte

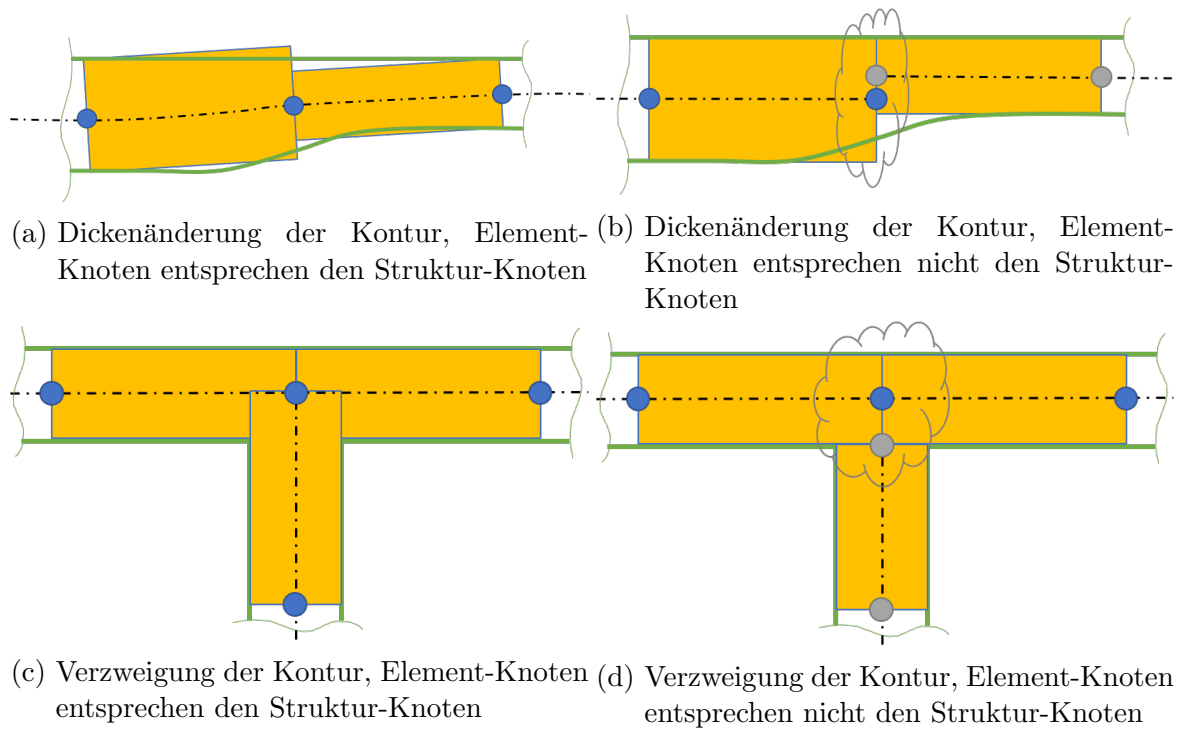


Abbildung 4.5.: Elementierung der Kontur: gelbe Rechtecke: Elemente; blaue/graue Punkte: Element-Knoten; graue Wolken: Struktur-Knoten; schwarze Strickpunktlinie: Konturmittellinie

Stellen feiner elementiert werden. Die festen und flexiblen Kontur-Knoten sind an einem Beispielpprofil in Abbildung 4.7 dargestellt.

Im dritten Schritt wird an jedem Kontur-Knoten ein Struktur-Knoten mit den entsprechenden Element-Knoten erzeugt. Dazu ist die in Abbildung 4.7 rot markierte Verbindung von Holm und Profilkontur in Abbildung 4.8 vergrößert dargestellt. Die Element-Knoten der Elemente der Profilkontur werden um die halbe Dicke des Materials an dieser Stelle entlang des Normalenvektors der Kontur nach innen verschoben. So wird gewährleistet, dass bei Dickenänderungen des Materials keine Sprünge in der aerodynamischen Hülle des Profils entstehen. Die Element-Knoten des Holmstegs entsprechen den Positionen der Kontur-Knoten des Holms.

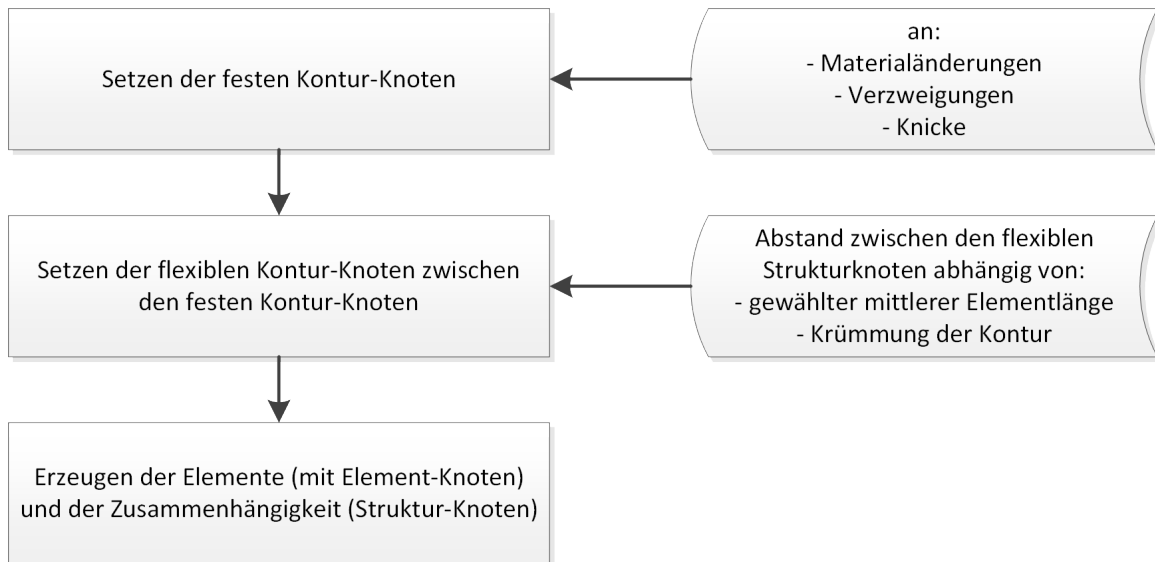


Abbildung 4.6.: Der Ablauf der Elementierung

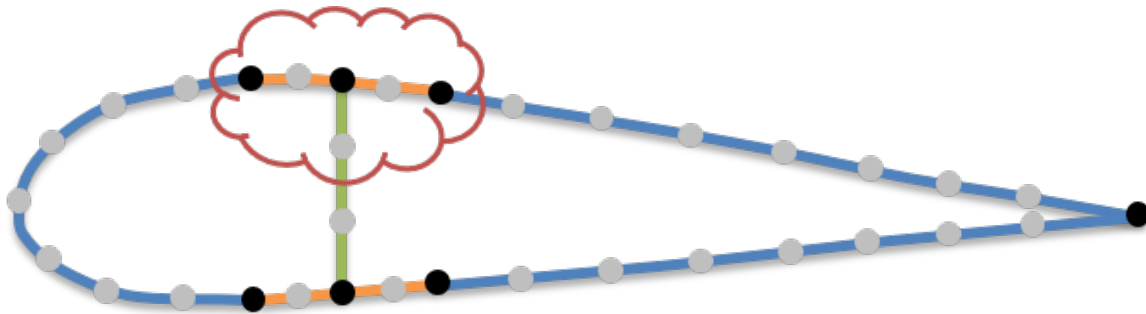
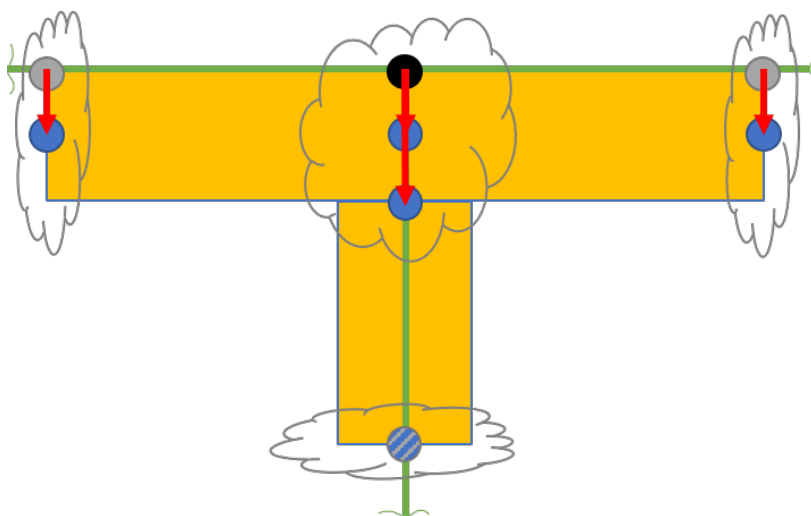
Abbildung 4.7.: Kontur-Knoten an einem Profil aus unterschiedlichen Materialien:
schwarz: feste Kontur-Knoten, grau: flexible Kontur-Knoten

Abbildung 4.8.: Ermitteln der Positionen der Element-Knoten (blau) (schwarz: feste Kontur-Knoten, grau: flexible Kontur-Knoten, rot: Normalenvektoren der Kontur)

5. Validierung

Um das zu entwickelnde Modul zur Querschnittsberechnung zu validieren, werden die damit erzeugten Ergebnisse mit denen von zwei anderen Tools verglichen. Das erste Tool zum Vergleich ist das bestehende PreDoCS Querschnitts-Modul, das auf einem analytischen Ansatz basiert, vgl. Hardt [43]. Des Weiteren wird das 2D-FE-Tool BECAS für den Vergleich verwendet. Die beiden Tools werden in Abschnitt 5.1 näher beschrieben. Ein Vergleich mit experimentellen Daten wird nicht durchgeführt.

Die Validierung gliedert sich in vier Schritte:

1. Vergleich der Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix, dem ESP, dem SMP und dem Hauptachsenwinkel (HAW) von Querschnitten aus isotropem Material. Zusätzlich wird eine Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse, vor allem der Kraftflussverläufe, anhand einer Tabelle mit qualitativen Bewertungskriterien durchgeführt, die in Anhang D zu finden ist.
2. Vergleich der Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix, dem ESP, dem SMP und dem HAW von Querschnitten aus Faserverbund-Material.
3. Untersuchen des Verlaufs der Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix bei einer Variation des Faserwinkels für alle drei Tools.
4. Untersuchen des Verlaufs der Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix bei einer Variation der Elementgröße für alle drei Tools.

Da der Angriffspunkt der Querkkräfte und der Drehpol des Querschnitts der analytischen Ansätze (PreDoCS-Module) der SMP ist, BECAS aber den Ursprung des Koordinatensystems verwendet, müssen diese beiden Punkte übereinstimmen, wenn die Steifigkeitsmatrizen verglichen werden sollen. Um das zu erreichen, wird das Koordinatensystem für alle Tools so gelegt, dass der Ursprung in dem mit dem aktuellen PreDoCS-Modul ermittelten SMP liegt.

Für die Vergleiche werden für jeden Querschnitt die Positionen des ESP und SMP, sowie der HAW und alle von Null verschiedenen Werte der Steifigkeitsmatrix miteinander verglichen. Zusätzlich wird noch die Abweichung der Ergebnisse zu BECAS dargestellt. Die Abweichung der Koordinaten des ESP und SMP sind auf die größte Länge des Querschnitts bezogen (für alle Querschnitte 1 m) und die Abweichung der Steifigkeitsmatrix-Koeffizienten auf den jeweiligen Wert von BECAS.

Um die Koppelsteifigkeitskoeffizienten besser bewerten zu können, sind zusätzlich noch die normalisierten „Koppelparameter“ η_{ij} aufgeführt. Dabei wird der Koppelsteifigkeitskoeffizient mit der Wurzel aus dem Produkt der beiden zugehörigen Hauptsteifigkeitskoeffizienten dimensionslos gemacht (nach Krenk und Couturier [44]):

$$\eta_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}S_{jj}}} \quad i, j = 1..6 \quad i \neq j \quad (5.1)$$

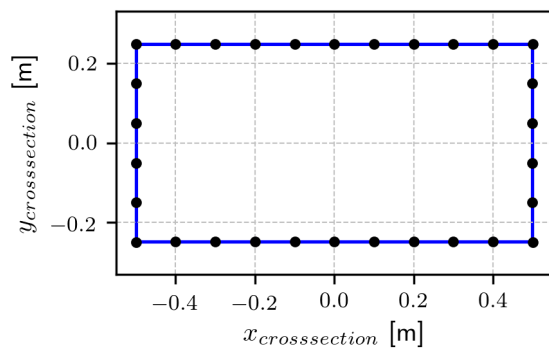
Die Koppelparameter liegen damit im Bereich von -1 bis 1 , wobei ± 1 die maximal möglichen Kopplungen darstellen.

Eine Übersicht der Testfälle, anhand derer die Validierung durchgeführt wird, findet sich in Tabelle 5.1. Die Testfälle werden in den jeweiligen Abschnitten noch näher erläutert.

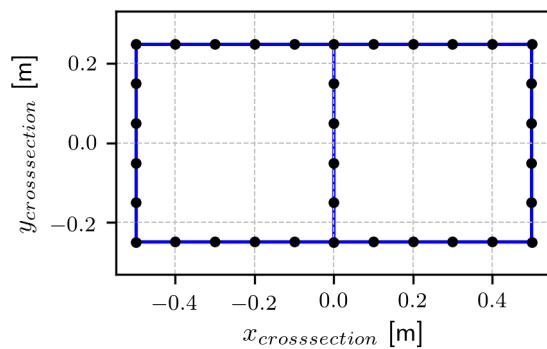
Tabelle 5.1.: Übersicht der Testfälle zur Validierung

Testfall	Querschnitts-Geometrie	Material	Faserausrichtung
100	00	Alu	-
101	01	Alu	-
102	02	Alu	-
103	03	Alu	-
104	04	Alu	-
105	05	Alu	-
106	06	Alu	-
200	00	L1	0°
201	01	L1	0°
202	02	L1	0°
203	03	L1	0°
204	04	L1	0°
205	05	L1	0°
206	06	L1	0°
210	00	12 UD-Schichten	CAS-Anordnung
211	00	12 UD-Schichten	CUS-Anordnung
220	06	L1/L2	0°
221	06	L1/L2	0°
222	06	L1/L2	0°

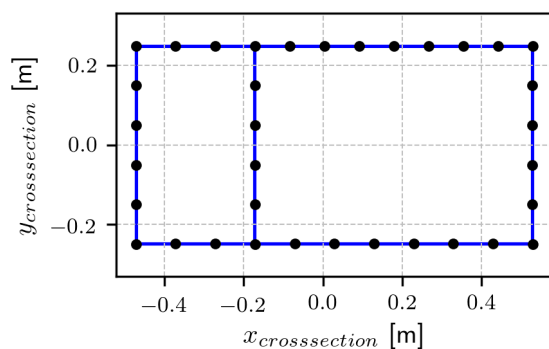
Die Geometrien der Test-Querschnitte sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Querschnitte 00 bis 03 sind Rechteckquerschnitte mit 1 m x 0,5 m Kantenlänge und unterschiedlichen Anordnungen des Holms bzw. der Holme. Querschnitt 04 ist ein NACA 0012 Profil mit einer Sehnenlänge von 1 m und dem Holm bei 40 % Profiltiefe. Die Querschnitte 05 und 06 sind NACA 2412 Profile mit ebenfalls einer Sehnenlänge von 1 m und dem Holm bei 40 % bzw. 30 % und 50 % der Profiltiefe.



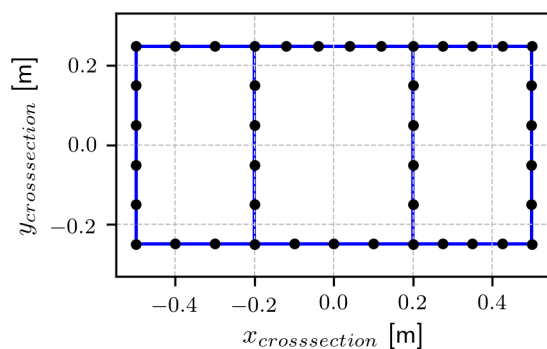
(a) Querschnitt 00



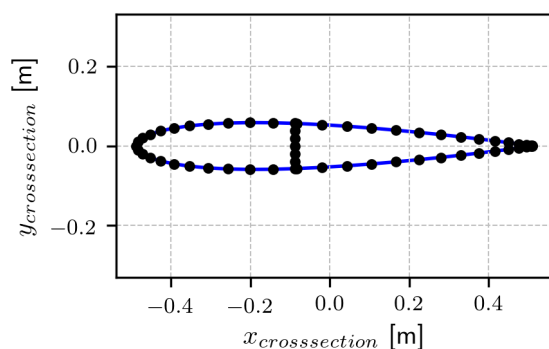
(b) Querschnitt 01



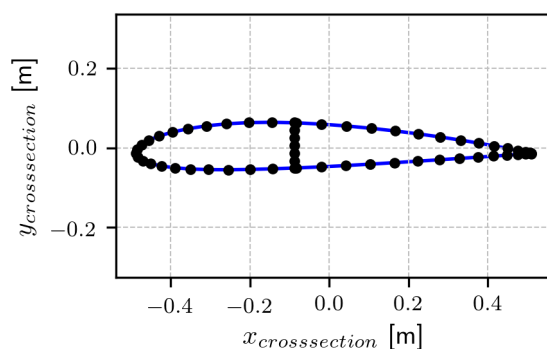
(c) Querschnitt 02



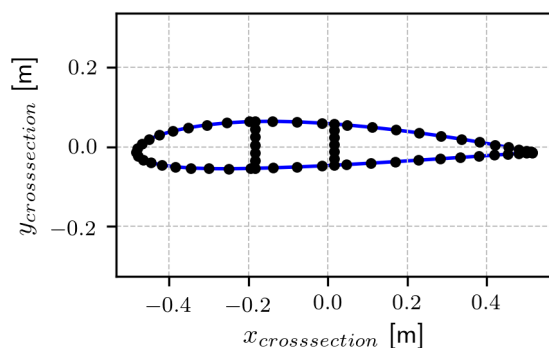
(d) Querschnitt 03



(e) Querschnitt 04



(f) Querschnitt 05



(g) Querschnitt 06

Abbildung 5.1.: Geometrien der Test-Querschnitte zur Validierung

5.1. Tools zur Validierung

In diesem Abschnitt werden die Tools, mit denen das aktuelle PreDoCS-Modul validiert werden soll, näher beschrieben.

5.1.1. Bestehendes PreDoCS-Querschnitts-Modul

Eine Vergleichsmöglichkeit stellt das bestehende PreDoCS-Querschnitts-Modul dar. Details dazu finden sich in Hardt [43]. Hierbei handelt es sich um ein Modul zur analytischen Berechnung von Querschnittssteifigkeiten von dünnwandigen isotropen Flügelstrukturen. Es wird die klassische Euler-Bernoulli-Biegetheorie für Hybridstrukturen mit einem Torsionsansatz nach Wiedemann [41] verwendet. Berechnet wird eine 3x3-Stefigkeitsmatrix mit den Freiheitsgraden Längsdehnung und zwei Biegungen:

$$\begin{pmatrix} F_z \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w'_0 \\ \Theta'_x \\ \Theta'_y \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Zusätzlich wird die Torsionssteifigkeit GJ ermittelt, die im weiteren Verlauf auch als S_{66} bezeichnet wird. Des Weiteren werden der ESP, der SMP und der HAW berechnet und die Normal- und Schubflüsse über der Kontur für jeden Lastfall ausgegeben.

Um das bestehende Modul auf Querschnitte aus Faserverbund-Materialien anwenden zu können, müssen ein äquivalenter Elastizitäts- und Schubmodul bestimmt werden. Es werden zwei verschiedene Methoden verwendet, diese zu berechnen.

Bestimmung des Elastizitäts- und Schubmoduls nach Schürmann [8]

Die erste Methode nach Schürmann [8, S. 226ff] geht von einem Scheibenelement mit der Scheibensteifigkeitsmatrix \mathbf{A} aus.

$$\begin{pmatrix} N_{ss} \\ N_{zz} \\ N_{sz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{sz} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Wird nun ein Proportionalitätsfaktor zwischen Längsdehnung und Längsspannung (E -Modul: $N_{zz} = t\sigma_{zz} = Et\varepsilon_{zz}$) gesucht, müssen zwei Annahmen getroffen werden, um E berechnen zu können. Schürmann [8] trifft die Annahme, dass bei einer Dehnung in z -Richtung der Kraftfluss in s -Richtung und der Schubfluss in der s - z -Ebene zu Null werden, was einer unbehinderten Querkontraktion entspricht. Daraus ergibt sich der E -Modul zu

$$E_{Schuermann} = \frac{1}{(\mathbf{A}^{-1})_{22}t} \quad (5.4)$$

Dabei ist \mathbf{A}^{-1} die invertierte Scheibensteifigkeitsmatrix. Analog dazu wird der Schubmodul berechnet, indem die Annahme getroffen wird, dass bei einer Scherung in der s - z -Ebene die Kraftflüsse in s - und z -Richtung zu Null werden. Somit ergibt sich der Schubmodul zu

$$G_{Schuermann} = \frac{1}{(\mathbf{A}^{-1})_{66}t} \quad (5.5)$$

Bestimmung des Elastizitäts- und Schubmoduls nach Song [34]

Einen ähnlichen Ansatz wählt Song [34], der auch davon ausgeht, dass der Kraftfluss in s -Richtung zu Null wird. Zur Berechnung des E -Moduls nimmt er im Gegensatz zu Schürmann [8] an, dass die Scherung und nicht der Schubfluss in der s - z -Ebene zu Null wird. Zur Ermittlung des Schubmoduls nimmt er an, dass die Längsdehnung in z -Richtung zu Null wird. Damit ergeben sich E und G zu

$$E_{Song} = \frac{1}{t} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) \quad (5.6)$$

$$G_{Song} = \frac{1}{t} \left(A_{66} - \frac{A_{16}^2}{A_{11}} \right) \quad (5.7)$$

5.1.2. BECAS

Als zweites Vergleichs-Tool soll ein 2D-FE Ansatz verwendet werden, da dieser im Allgemeinen genauere Ergebnisse liefert [15]. Ein sehr verbreitetes 2D-FE-Tool zur Berechnung von Querschnitts-Steifigkeiten ist *VABS*¹. *VABS* basiert auf der Variational Asymptotic Method (VAM), bei der die Dimensionsreduktion des Balkenproblems mittels eines „Schlankheits-Parameters“ durchgeführt wird [9]. Verglichen mit anderen Programmen zu Querschnittsberechnung und einer analytischen Referenzlösung auf Basis der Elastizitätstheorie liefert *VABS* sehr gute Ergebnisse [15].

Ein weiteres 2D-FE-Tool zur Querschnittsberechnung ist *BECAS*². Bei *BECAS* handelt es sich um ein in MATLAB geschriebenes Querschnitts-Analyse-Tool, das von der DTU entwickelt wird. Es greift auf einen 2D-FE-Ansatz zurück, um die Verformungen des Querschnitts zu berechnen. Da *BECAS* für akademische Zwecke kostenlos verwendet werden darf (die kostenlose Variante von *VABS* hat eine sehr stark reduzierte maximale Elementanzahl) und die Ergebnisse sehr gut mit denen von *VABS* übereinstimmen [45], wird *BECAS* zur Validierung verwendet.

Mit *BECAS* können beliebige Querschnitts-Geometrien berechnet werden, die aus unterschiedlichen orthotropen Materialien aufgebaut sind, sowohl Vollquerschnitte,

¹<http://analyswift.com/vabs-cross-sectional-analysis-tool-for-composite-beams/>, siehe Hodges [9]

²<http://www.becas.dtu.dk/>, siehe Blasques und Stolpe [38]

offene Querschnitte und geschlossene Querschnitte mit einer beliebigen Anzahl von Zellen. Es wird eine 6x6-Steifigkeitsmatrix mit den Freiheitsgraden Längsdehnung, zweimal Querkraftschub, zweimal Biegung und Torsion inklusive aller Kopplungskoeffizienten berechnet:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ w'_0 \\ \Theta'_x \\ \Theta'_y \\ \phi' \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Außerdem werden der ESP, der SMP und der HAW und die Dehnungs- und Spannungstensoren für die finiten Elemente für jeden Lastfall ausgegeben.

Für den Vergleich mit PreDoCS werden die Querschnitte aus Q4-Elementen aufgebaut. Diese Elemente sind zweidimensionale isoparametrische Rechteckelemente mit vier Knoten, siehe Abbildung 5.2.

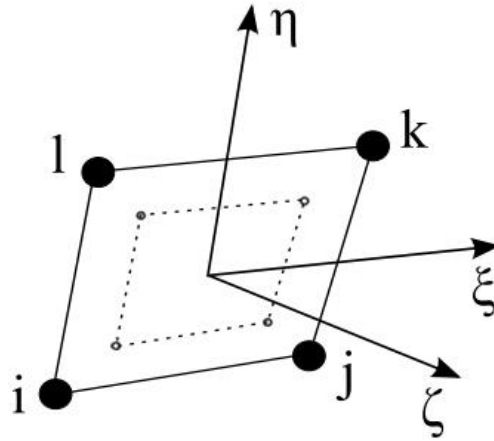


Abbildung 5.2.: Isoparametrisches Rechteckelement (BECAS Q4-Element) [45]

5.2. Vergleich anhand von Querschnitten aus isotropem Material

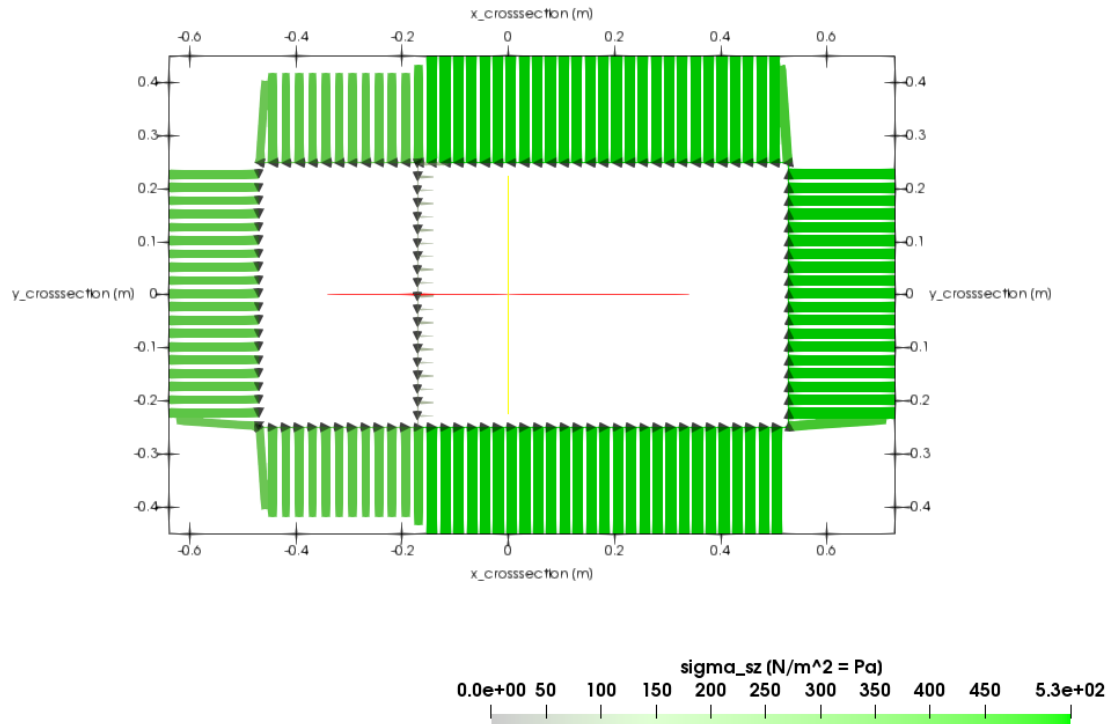
Die Kontur aller Querschnitte besteht für die Validierung mit isotropem Material aus 2mm dickem Aluminium. Die Dichte ρ beträgt 2820 kg m^{-3} , der Elastizitätsmodul E 71 GPa und die Querkontraktionszahl ν 0,32 [46]. In Anhang E sind die Ergebnisse der Berechnungen der Querschnitte aus isotropem Material von allen Tools vergleichend dargestellt. Diese Ergebnisse wurden mit den in Tabelle D.4 aufgeführten Kriterien auf Plausibilität geprüft.

Die Abweichung der Positionen des ESP und des SMP liegt für alle Querschnitte und Berechnungsmethoden unter 2 %. Auch bei dem HAW gibt es keine signifikanten Abweichungen. Die Längsdehnungs-, Biege- und Torsionssteifigkeit (S_{33} , S_{44} , S_{55} , S_{66}) der PreDoCS Module liegt im Bereich um 1 % um den BECAS Ergebnissen. Auch die Koppelsteifigkeiten zwischen Längsdehnung und Biegung beinhalten lediglich eine Abweichung von unter 1 %. Eine sehr große Abweichung des aktuellen PreDoCS-Moduls ist allerdings bei den Schubsteifigkeiten festzustellen (S_{11} , S_{22}). Die relative Abweichung liegt bei bis zu 1900 % (Querschnitte 104 und 105). Auch die Koppelsteifigkeit der beiden Schubsteifigkeiten S_{12} weist für den Querschnitt 106 eine Abweichung auf, der für den Koppelparameter η_{12} in der Größenordnung von $1 \cdot 10^{-3}$ liegt. Auch die Koppelsteifigkeit S_{16} und S_{26} weisen Abweichungen auf, die im zugehörigen Koppelparameter die Größenordnung $1 \cdot 10^{-2}$ erreichen.

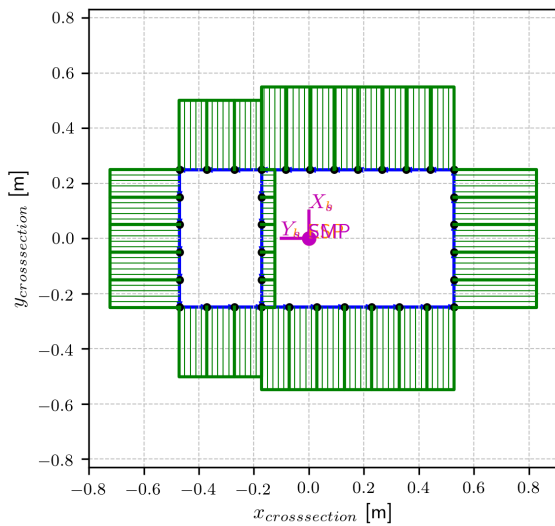
Werden die Spannungsverläufe der drei Tools über der Kontur miteinander verglichen, so fällt auf, dass die Normalspannungsverläufe und die Membran-Schubspannungsverläufe durch Torsion aller drei Tools sehr gut übereinstimmen. In Abbildung 5.3 sind die Membran-Schubspannungen aller Tools durch Torsion gegenübergestellt.

Auch die Verläufe der Membran-Schubspannung von BECAS und dem bestehenden PreDoCS-Modul für eine Querkraft-Belastung stimmen überein. Einzig der Verlauf der Membran-Schubspannung durch Querkraft des aktuellen PreDoCS-Moduls weist, wie in Abbildung 5.4 zu sehen, konstante Membran-Schubspannungen entlang der Kontur auf, was nicht dem Ergebnis von BECAS entspricht.

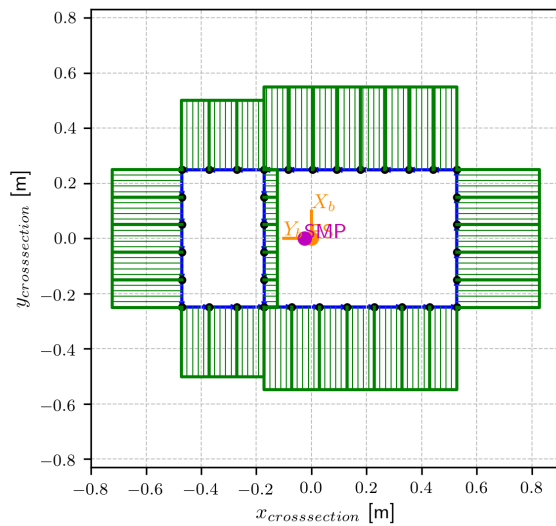
Eine weitere Abweichung der Ergebnisse des aktuellen PreDoCS-Moduls zu BECAS ist in der transversalen Schubspannung zu finden. In Abbildung 5.5 ist zu sehen, dass bei einer Belastung durch eine „1“-Querkraft in x -Richtung die von BECAS berechnete transversalen Schubspannungen im Bereich von $0,0004 \text{ N m}^{-2}$ liegen, also quasi nicht vorhanden sind. Beim aktuellen PreDoCS-Modul liegen sie bei 167 N m^{-2} und damit in der selben Größenordnung wie die Membran-Schubspannung, die auch bei 167 N m^{-2} liegt.



(a) BECAS



(b) Aktuelles PreDoCS-Modul



(c) Bestehendes PreDoCS-Modul

Abbildung 5.3.: Vergleich der Membran-Schubspannungsverläufe des Querschnitts 102 aus isotropem Material durch ein „1“-Torsionsmoment

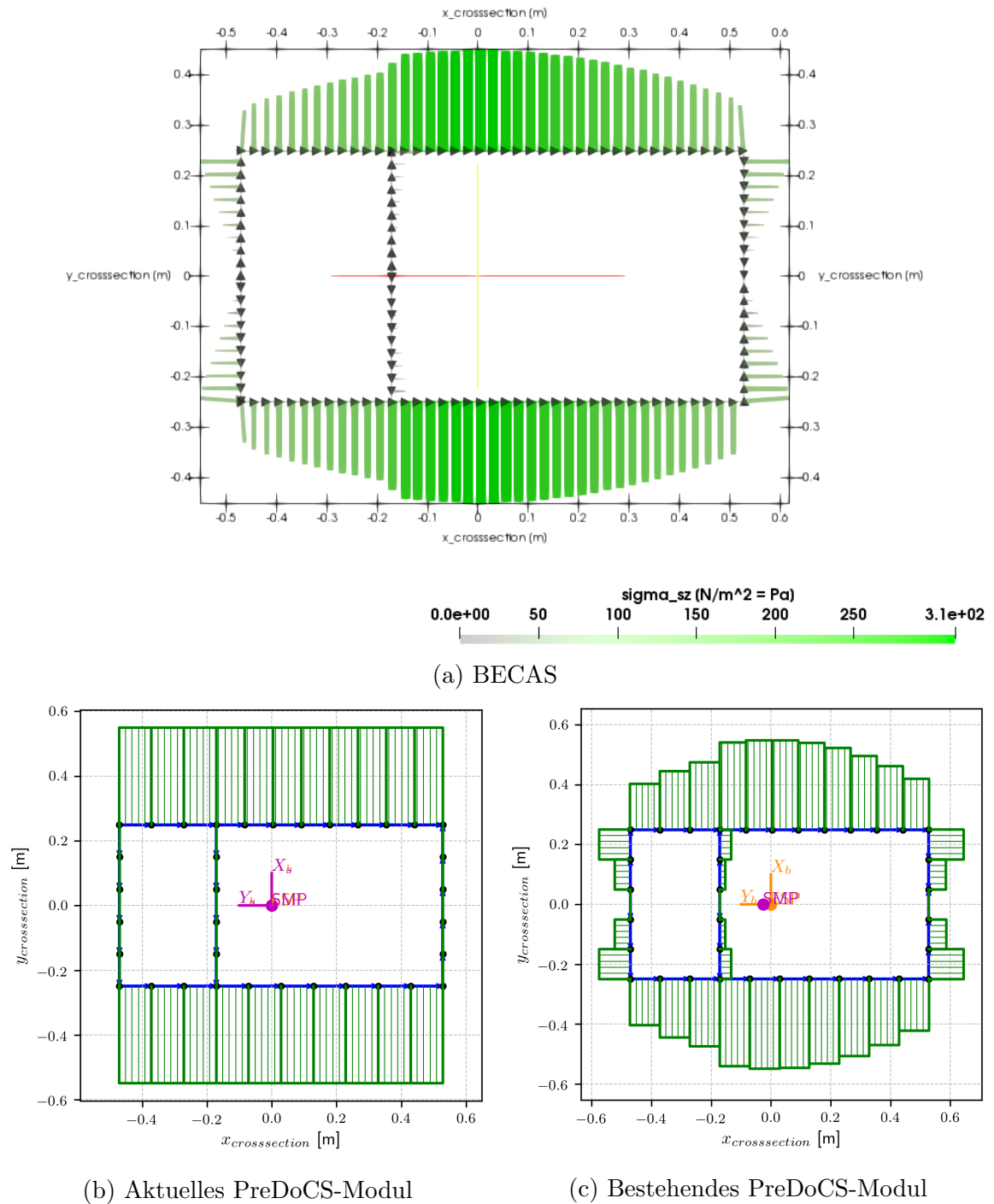


Abbildung 5.4.: Vergleich der Membran-Schubspannungsverläufe des Querschnitts 102 aus isotropem Material durch eine „1“-Querlast in x -Richtung

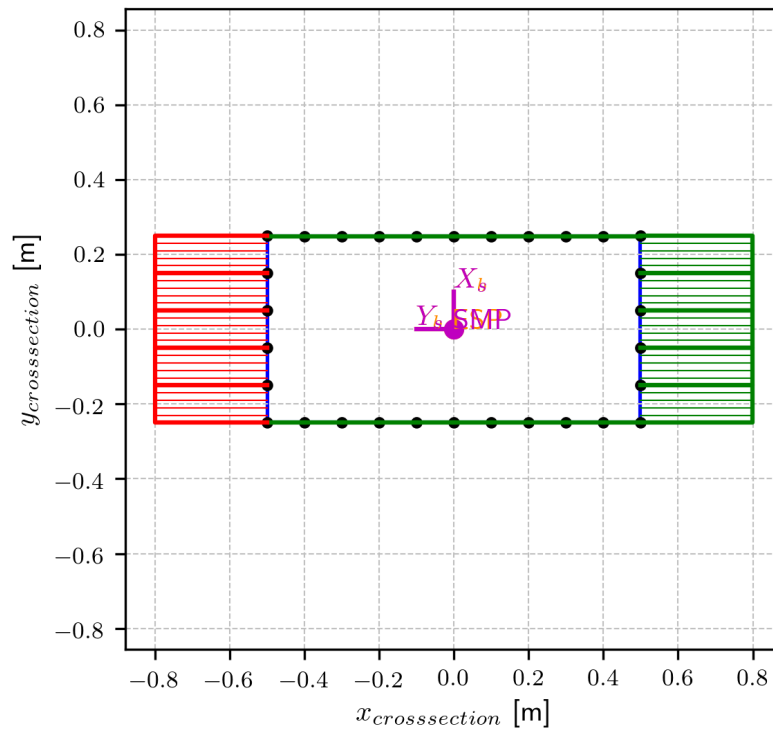
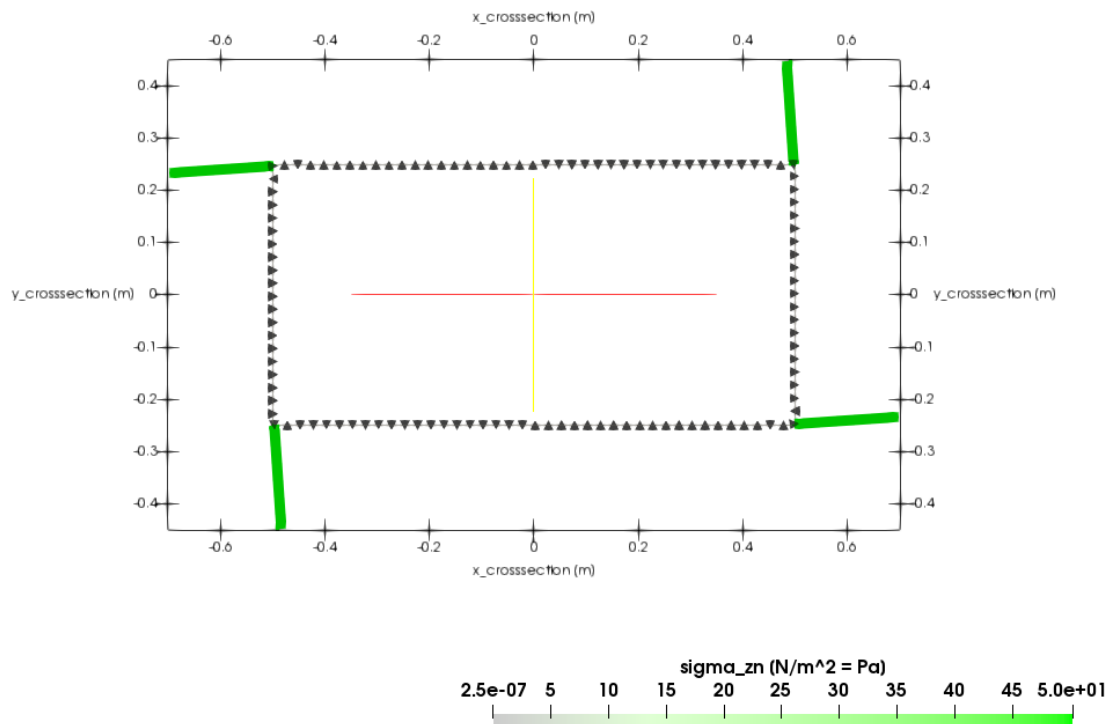


Abbildung 5.5.: Vergleich der transversalen Schubspannungsverläufe des Querschnitts 100 aus isotropem Material durch eine „1“-Querkraft in x -Richtung

5.3. Vergleich anhand von Querschnitten aus Faserverbund-Material

Für die Validierung von Querschnitten aus Faserverbund-Material wird die Kontur des Querschnitts aus dem CFK-Laminat „L1“ aufgebaut. Die Materialdaten der Einzelschicht finden sich in Tabelle C.1, der Aufbau des Laminats in Tabelle C.2.

Querschnitt 210 entspricht von der Geometrie Querschnitt 00, allerdings ist das Material in einer CAS-Anordnung (Circumferentially Asymmetric Stiffness, asymmetrische Steifigkeit über den Umfang) ausgerichtet. Das gesamte Laminat L1 ist dabei um 30° gedreht, aber für sich gegenüberliegende Wände mit unterschiedlichem Vorzeichen (siehe Abbildung 5.6a). Querschnitt 211 entspricht von der Geometrie ebenfalls Querschnitt 00, hier ist das Material in einer CUS-Anordnung (Circumferentially Uniform Stiffness, einheitliche Steifigkeit über den Umfang) ausgerichtet. Das gesamte Laminat L1 ist dabei in allen Wänden des Rechteckquerschnitts um 30° gedreht (siehe Abbildung 5.6b).

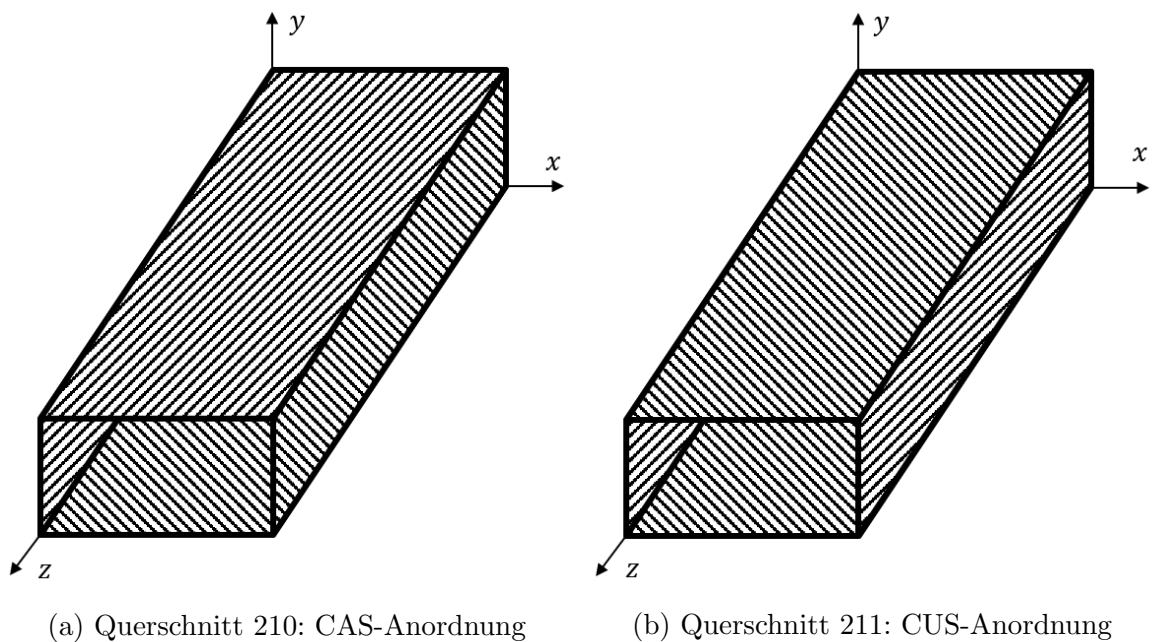


Abbildung 5.6.: CAS- und CUS-Anordnung

Zusätzlich werden die Querschnitte 220, 221 und 222 berechnet, dabei handelt es sich geometrisch um den Querschnitt 06. Querschnitt 220 besteht aus Laminat L1 und der linke Holm aus einem dickeren Laminat L2 (Tabelle C.3). Bei Querschnitt 221 ist nur der rechte Holm und bei Querschnitt 222 ist die linke Zelle aus Laminat L2 aufgebaut.

Die Tabellen mit den Ergebnissen des Vergleichs finden sich in Anhang F. Ähnlich zu den Ergebnissen aus dem vorherigen Abschnitt liegen die Abweichung der Positionen des ESP, des SMP und die Längsdehnungs-, Biege- und Torsionssteifigkeit der

PreDoCS-Module im Bereich um 2 % um den BECAS Ergebnissen. Auch bei dem HAW gibt es wieder keine signifikanten Abweichungen und die Koppelsteifigkeiten zwischen Längsdehnung und Biegung beinhalten ebenfalls eine Abweichung von unter 2 %. Allerdings ist auch bei den Querschnitten aus Faserverbund-Materialien eine große Abweichung bei den Schubsteifigkeiten festzustellen. Die relative Abweichung liegt bei bis zu 450 % (Querschnitt 204). Auch die mit den Schubsteifigkeiten verbundenen Koppelsteifigkeiten S_{12} , S_{13} , S_{16} , S_{23} , S_{25} und S_{26} weisen bei den entsprechenden Koppelparametern Abweichungen in der Größenordnung von $1 \cdot 10^{-2}$ auf.

Bei Querschnitt 210, wo durch die CAS-Anordnung eine Längsdehnungs-Torsions-Kopplung erreicht werden soll, besitzt der zugehörige Kopplungs-Koeffizient S_{36} eine relative Abweichung von unter 0,5 %. Für den Querschnitt 211, bei dem durch die CUS-Anordnung eine Biege-Torsions-Kopplung erreicht werden soll, liegen die entsprechenden Kopplungs-Koeffizienten S_{46} und S_{56} bei einer relativen Abweichung von unter 0,5 %.

5.4. Einfluss des Faserwinkels auf die Querschnittssteifigkeit

Um den Einfluss des Faserwinkels auf die Steifigkeiten zu bestimmen, wird ein Rechteckquerschnitt in CAS-Anordnung untersucht. Es handelt sich um den Querschnitt 00, der aus zwölf gleichsinnig ausgerichteten UD-Schichten (Tabelle C.1) aufgebaut ist, deren gemeinsamer Faserwinkel variiert wird. Zur Auswertung ist jeder Koeffizient der Steifigkeitsmatrix über dem Faserwinkel in einem Polardiagramm aufgetragen. Es sei darauf hingewiesen, dass ein Faserwinkel von 90° der Faserausrichtung entlang der Balkenlängsachse entspricht, siehe Abschnitt 3.1.2. Die Koeffizienten S_{12} , S_{13} , S_{15} , S_{16} , S_{23} , S_{24} , S_{26} , S_{34} , S_{35} , S_{45} , S_{46} und S_{56} bleiben über die gesamte Variation Null, alle anderen Diagramme finden sich auch in Anhang G.

Die in Abbildung 5.7 gezeigten Schubsteifigkeiten S_{22} des aktuellen PreDoCS-Moduls und von BECAS haben ähnliche fast wie skalierte Verläufe. Die Maxima der Schubsteifigkeit werden bei einem Faserwinkel von circa 60° und 120° erreicht, die Minima bei 0° und 90° .

Die Längssteifigkeit und die Biegesteifigkeiten aller Tools haben qualitativ sehr ähnliche Verläufe über dem Faserwinkel, deswegen werden diese Verläufe nur anhand der Längssteifigkeit beschrieben. Die Längssteifigkeit aller Tools in Abbildung 5.7b hat ihre Maxima bei 90° und 270° und die Minima bei 0° und 180° . Die Verläufe von BECAS, dem aktuellen PreDoCS-Modul und dem bestehenden PreDoCS-Modul mit dem Ansatz nach Song liegen übereinander und sind fast nicht zu unterscheiden. Nur das bestehende PreDoCS-Modul mit dem Ansatz nach Schürmann setzt sich von den anderen Berechnungsmethoden ab und hat einen weniger bauchigen Verlauf.

Der Steifigkeitskoeffizient S_{36} beschreibt die Längsdehnungs-Torsions-Kopplung, die charakteristisch für die CAS-Anordnung ist. Der Koeffizient ist wie erwartet im ersten und dritten Quadranten positiv und im zweiten und vierten Quadranten negativ. Auch hier liegen die Kurven von dem aktuellen PreDoCS-Modul und BECAS übereinander, vom bestehenden PreDoCS-Modul kann dieser Koeffizient nicht berechnet werden.

Beim Betrachten des Verlaufes der Torsionssteifigkeit in Abbildung 5.7c liegen wieder die Verläufe von BECAS, dem aktuellen PreDoCS-Modul und dem bestehenden PreDoCS-Modul mit dem Ansatz nach Song übereinander und ähneln dem Verlauf der Schubsteifigkeiten. Der Verlauf des bestehenden PreDoCS-Moduls mit dem Ansatz nach Schürmann hat nicht so ausgeprägte Maxima, die auch versetzt bei 45° und 135° liegen. In den Minima bei 0° , 90° , 270° und 360° liegen die Kurven wieder übereinander.

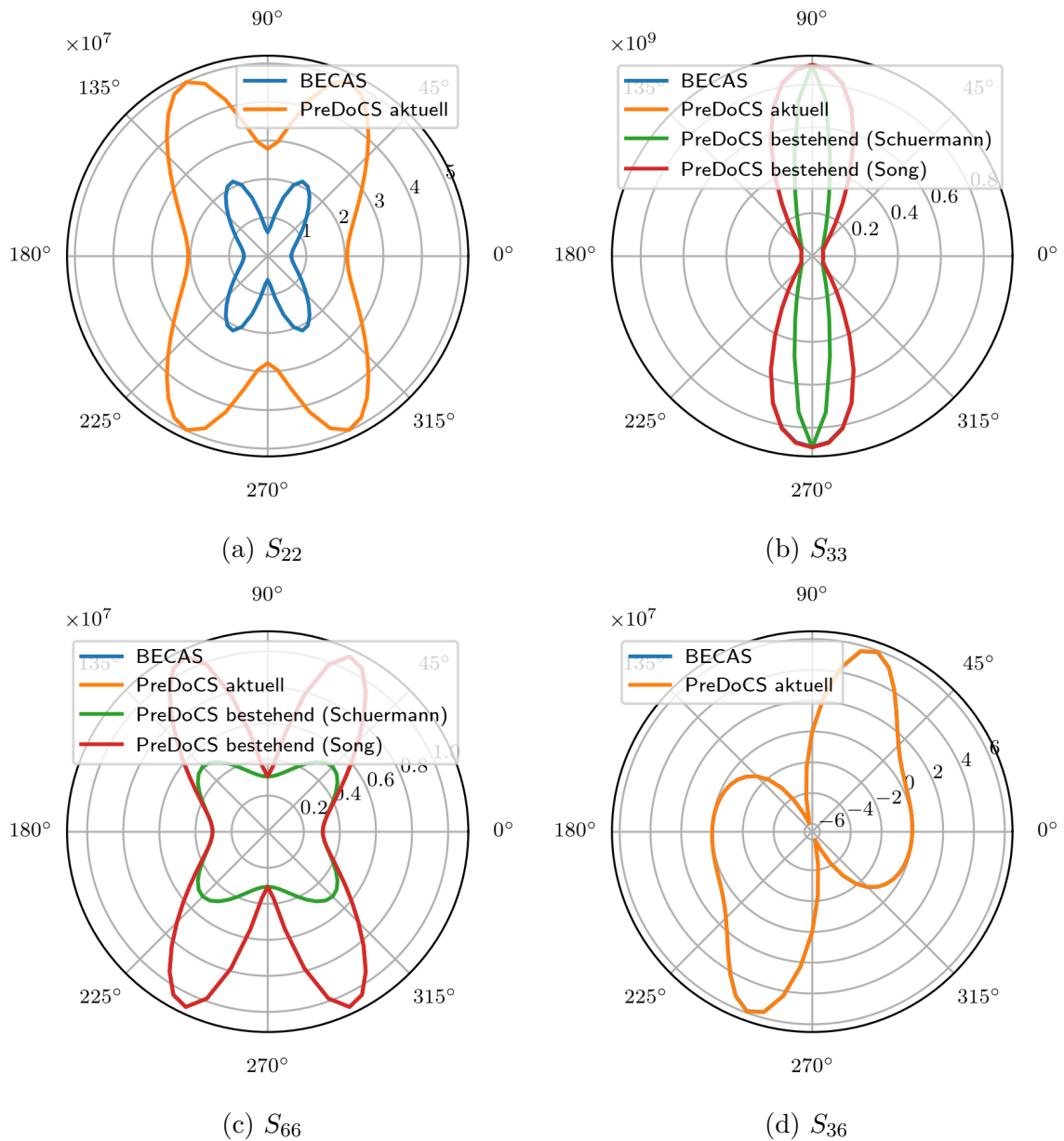


Abbildung 5.7.: Steifigkeits-Koeffizienten unter Variation des Faserwinkels

5.5. Einfluss der Elementlänge auf die Querschnittssteifigkeit

Da BECAS auf einem FE-Ansatz basiert, sind die Ergebnisse abhängig von der Anzahl der Elemente. Der Einfluss der Elementgröße auf die Ergebnisse von BECAS ist von Blasques [45] untersucht worden. Um den Einfluss der Elementgröße auf die Ergebnisse von BECAS und PreDoCS zu vergleichen, werden für den Rechteckquerschnitt 00 aus Laminat L1 mit unterschiedlich fein elementierter Kontur Berechnungen durchgeführt. Die Elementlänge in Konturrichtung wird von 0,0125 m bis 0,5 m variiert. Die Elementanzahl in Dickenrichtung entspricht der Anzahl der Schichten und beträgt 12. Die Koeffizienten S_{12} , S_{13} , S_{15} , S_{16} , S_{23} , S_{24} , S_{26} , S_{34} , S_{35} , S_{45} , S_{46} und S_{56} bleiben wie bei der Variation des Faserwinkels über alle Elementlängen Null, alle anderen Diagramme finden sich in Anhang H.

Die Verläufe der beiden Schubsteifigkeiten S_{11} und S_{22} sind sich sehr ähnlich, weshalb nur auf den Verlauf von S_{11} eingegangen wird. Das selbe gilt für die Längsdehnungs- und Biegesteifigkeiten, weshalb hier nur auf den Verlauf der Längsdehnungssteifigkeit S_{33} eingegangen wird.

Wie in Abbildung 5.8 zu sehen, haben die Verläufe aller Steifigkeiten über der Elementlänge gemeinsam, dass die Verläufe der PreDoCS-Module exakt übereinander liegen und sich nicht mit der Elementlänge ändern. Die Steifigkeitsverläufe von BECAS haben eine ausgeprägte Abhängigkeit von der Elementlänge und der Betrag der Steifigkeits-Koeffizienten steigt mit abnehmender Elementlänge. Die Verläufe der Hauptsteifigkeits-Koeffizienten der BECAS Ergebnisse nähern sich der PreDoCS-Lösung bei abnehmender Elementlänge. Die Verläufe der Koppelsteifigkeits-Koeffizienten der BECAS Ergebnisse entfernen sich mit abnehmender Elementlänge von den PreDoCS-Lösungen, wobei die Größenordnung der Koppelsteifigkeits-Koeffizienten bei $1 \cdot 10^3$ liegt und die der Hauptsteifigkeits-Koeffizienten bei $1 \cdot 10^7$.

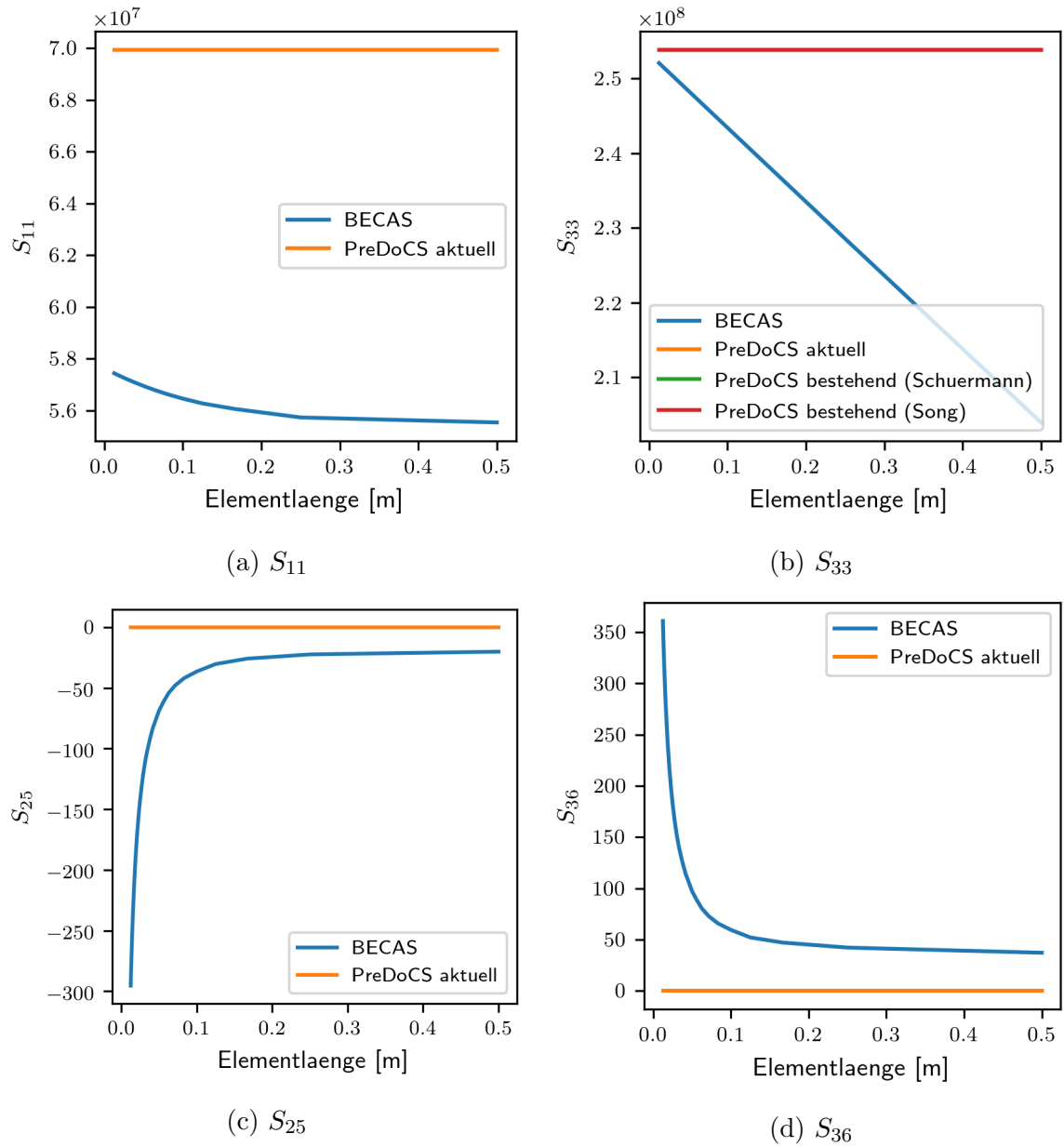


Abbildung 5.8.: Steifigkeits-Koeffizienten unter Variation der Elementlänge

6. Diskussion der Ergebnisse

Die in Kapitel 5 beschriebenen Ergebnisse werden im folgenden Kapitel bezüglich Ihrer Eignung für die Verwendung in einem Vorauslegungstool bewertet. Außerdem findet ein Vergleich der Rechenzeiten der verschiedenen Tools statt.

6.1. Genauigkeit

Die Ergebnisse der Validierung der Querschnitte aus isotropem Material und Faserverbund-Material zeigen, dass die Berechnung des ESP, des SMP und des HAW mit allen PreDoCS-Modulen gut funktioniert. Auch die Genauigkeit der Längsdehnungs-, Biege- und Torsionssteifigkeit (S_{33} , S_{44} , S_{55} , S_{66}) und den zugehörigen Koppelsteifigkeiten des aktuellen PreDoCS-Moduls liegt in einem Bereich, der für die Vorauslegung komplett ausreichend ist.

Die sehr große Abweichung zwischen den Schubsteifigkeiten und den zugehörigen Koppelsteifigkeits-Koeffizienten der Ergebnisse des aktuellen PreDoCS-Moduls und BECAS ist auch für die Vorauslegung zu groß. Diese Abweichung kann dadurch erklärt werden, dass der aktuelle Ansatz auf einer Schubtheorie erster Ordnung basiert, siehe Abschnitt 3.1.1. Dabei wird die Scherung über den gesamten Querschnitt als konstant angenommen, was nicht der Realität entspricht, wie in Abbildung 6.1 dargestellt.

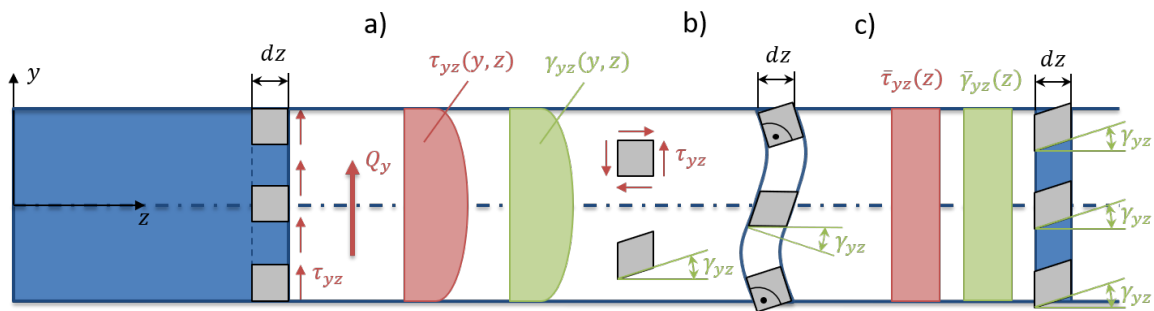


Abbildung 6.1.: Einfluss der Querkraft: a) nichtlinearer Verlauf von Schubspannung und Scherung, b) tatsächliche Verwölbung des Querschnitts, c) Näherung für Schubspannung und Scherung nach Timoschenko [40]

Die Schubspannungsverläufe des aktuellen PreDoCS-Moduls sind (bei gleichen Materialeigenschaften) demnach auch konstant und entsprechen nicht den zu erwartenden Verläufen und den Verläufen, die mit BECAS berechnet wurden (siehe Abbil-

dung 5.4). Da die Festigkeitsanalyse des Querschnitts unter anderem auf den Schubspannungsverläufen basiert, können bei dieser Fehler auftreten. So kann es sein, dass die wahre Beanspruchung an bestimmten Stellen der Kontur deutlich höher ist, als berechnet. Möglichkeiten der Kompensierung dieser Abweichung sind in Abschnitt 6.1.1 aufgeführt. Die Schubspannungsverläufe des bestehenden PreDoCS-Moduls hingegen entsprechen den erwarteten Verläufen und stimmen mit den BECAS Ergebnissen gut überein.

Auch die Berechnung der transversalen Schubspannungen beinhaltet eine nicht zu vernachlässigende Abweichung. Es werden für das aktuelle PreDoCS-Modul zu große transversale Schubspannungen berechnet, die in den BECAS-Ergebnissen nicht wiedergefunden werden können. Diese transversalen Schubspannungen, die in den Ergebnissen des aktuellen PreDoCS-Moduls vorhanden sind und in den Ergebnissen von BECAS nicht, führen bei gleicher Querschnitts-Verformung zu einer zu großen Formänderungsenergie, die wiederum zu einer zu großen Steifigkeit führt.

Eine weitere Abweichung zwischen den Ergebnissen der PreDoCS-Module und BECAS ist bei den Koppelsteifigkeiten S_{16} und S_{26} festzustellen. Diese Koeffizienten koppeln die Freiheitsgrade der Querkraft und der Torsion und können durch die leichte Abweichung in der Berechnung des SMP zwischen PreDoCS und BECAS erklärt werden. So liegt der Punkt der Querkrafteinleitung bei BECAS nicht ganz exakt im SMP und eine angreifende Querkraft erzeugt somit eine Verdrillung. Dieser Effekt wird von den beiden Koppelsteifigkeits-Koeffizienten beschrieben.

Zu erwähnen ist auch, dass die Berechnung der Koppelsteifigkeits-Koeffizienten S_{36} , S_{46} und S_{56} der CAS- und CUS-Anordnung mit dem aktuellen PreDoCS-Modul eine sehr gute Genauigkeit besitzt. Dies ist wichtig für das Vorauslegungstool, da diese Koeffizienten Längsdehnung und Biegung mit Torsion koppeln, was ausschlaggebend für das Aeroelastic Tailoring ist.

6.1.1. Korrektur der Schubsteifigkeiten

Um die Abweichung bei der Berechnung der Schubsteifigkeiten zu kompensieren, kann ein Schubkorrekturfaktor eingeführt werden, die Schubflussverläufe werden dadurch allerdings nicht korrigiert [40].

Der Schubkorrekturfaktor ist definiert als der Quotient der Formänderungsenergien für die gleiche Verformung von dem Modell mit dem vereinfachten Scherungsverlauf und einem Modell mit dem korrekten Scherungsverlauf. Er ist abhängig von der Geometrie und vom Material des Querschnitts. Verfahren zur Berechnung der von Schubkorrekturfaktoren sind in Mahnken [40], Gruttmann und Wagner [47] und Cowper [48] für isotrope Materialien und in Bank [49], Bank und Melehan [50] und Kim, Yoon und Jung [51] für Faserverbund-Materialien beschrieben.

Die Formänderungsenergie für eine gegebene Querschnitts-Verformung wird nach

(2.1) aus der Querschnitts-Steifigkeitsmatrix berechnet. Wird angenommen, dass mit der Steifigkeitsmatrix von BECAS die korrekte Formänderungsenergie berechnet werden kann, kann der Schubkorrekturfaktor für das aktuelle PreDoCS-Modul mit Hilfe von BECAS bestimmt werden:

$$K_x = \frac{S_{11,BECAS}}{S_{11}} \qquad K_y = \frac{S_{22,BECAS}}{S_{22}} \qquad (6.1)$$

Die Schubkorrekturfaktoren sind in den Ergebnissen der Rechnungen zur Validierung im Anhang aufgeführt. Für den Querschnitt 00 aus isotropem Material berechnen sich die Schubkorrekturfaktoren nach (6.1) zu $K_x = 0,6092$ und $K_y = 0,2219$. Für den selben Querschnitt lassen sich nach Cowper [48] die Schubkorrekturfaktoren zu $K_x = 0,6305$ und $K_y = 0,2432$ berechnen. Diese stimmen sehr gut mit den mit BECAS berechneten Schubkorrekturfaktoren überein, was darauf schließen lässt, dass der aktuelle Ansatz korrekt implementiert wurde und die große Abweichung der Schubsteifigkeiten aus den vereinfachten Annahmen der Schubtheorie erster Ordnung herrührt. Kim, Yoon und Jung [51] berechnet Schubkorrekturfaktoren für dünnwandige Querschnitte aus Faserverbund-Materialien, die für einen Rechteckquerschnitt ebenfalls in der selben Größenordnung liegen.

Eine weitere Möglichkeit, die Abweichung der Schubsteifigkeitsberechnung zu beheben, ist die Verwendung einer Schubtheorie höherer Ordnung, wie sie beispielsweise Suresh und Nagaraj [35] beschreiben. Dabei wird die Scherung über dem Querschnitt nicht wie bei einer Schubtheorie erster Ordnung als konstant angenommen, sondern mit einer Funktion höherer Ordnung abgebildet. Ghugal und Shimpi [12] stellen verschiedene Ansätze der Modellierung von Querkraftschub in Balken aus Faserverbund-Materialien gegenüber.

Die dritte Möglichkeit, die Schubflussverläufe und die Schubsteifigkeiten besser zu berechnen besteht darin, einen Ansatz zur Herleitung der Querschnittssteifigkeiten zu verwenden, der eine Spannungs-Formulierung statt einer Verformungs-Formulierung verwendet (vgl. Kapitel 2). Ebenfalls gute Ergebnisse versprechen Ansätze, die beide Formulierungen kombinieren [17].

6.1.2. Einfluss des Faserwinkels

Bei einer Variation des Faserwinkels stimmen die Steifigkeiten der Berechnungen mit BECAS, dem aktuellen PreDoCS-Modul und dem bestehenden PreDoCS-Modul mit dem Ansatz nach Song [34] außer bei den Schubsteifigkeiten aufgrund der im vorherigen Abschnitt erwähnten Effekte sehr gut überein. Eine erhebliche Abweichung besteht zwischen den beschriebenen Verläufen und dem Verlauf des bestehenden PreDoCS-Moduls mit der Berechnung von Elastizitäts- und Schubmodul nach

Schürmann [8].

In Abbildung 6.2 sind der Elastizitäts- und Schubmodul für die Berechnungen nach Schürmann [8] und Song [34] über dem Faserwinkel des verwendeten Laminats vergleichend aufgetragen. Die Abweichungen von S_{33} , S_{44} und S_{44} skalieren mit dem Elastizitätsmodul in Abbildung 6.2, die Abweichungen von S_{11} , S_{22} und S_{66} mit dem Schubmodul. Das lässt darauf schließen, dass die Abweichung des bestehenden PreDoCS-Moduls mit dem Ansatz nach Schürmann [8] durch die Berechnung des Elastizitäts- und Schubmoduls zu erklären ist.

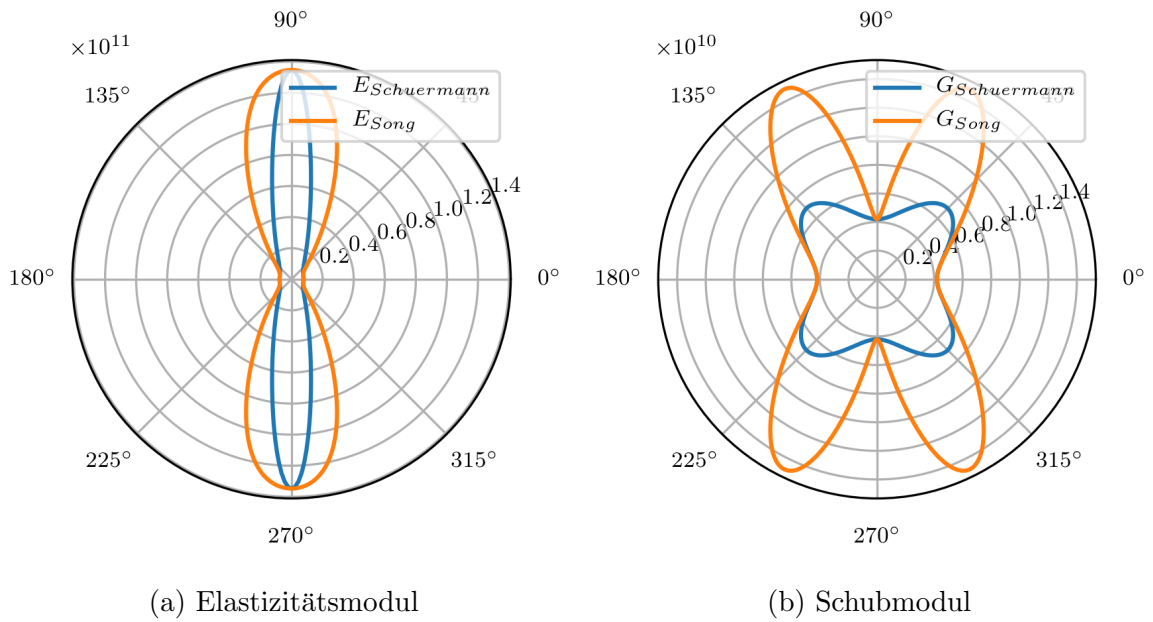


Abbildung 6.2.: Vergleich des Elastizitäts- und Schubmodul für die Berechnung nach Schürmann [8] und Song [34]

Diese Abweichung der beiden Ansätze wird maßgeblich durch die Dehnungs-Scherungs-Kopplung des Laminats beeinflusst. Der Betrag des entsprechenden Koeffizienten der Scheibensteifigkeitsmatrix A_{26} ist in Abbildung 6.3 für das verwendete Laminat über dem Faserwinkel aufgetragen. Nach den Formeln in Abschnitt 5.1.1 hat A_{26} über die Invertierung der Scheibensteifigkeitsmatrix einen Einfluss auf den Elastizitäts- und Schubmodul nach Schürmann [8]. Es fällt auf, dass an den Stellen, an denen A_{26} zu Null wird, die beiden Berechnungsmethoden übereinstimmen.

Aufgrund der dargestellten Ergebnisse sind bei der Verwendung des bestehenden PreDoCS-Moduls auf Querschnitte aus Faserverbund-Materialien der Elastizitäts- und Schubmodul nach dem Ansatz nach Song [34] aus Abschnitt 5.1.1 zu berechnen. Wird der Ansatz nach Schürmann [8] verwendet, kommt es zu großen Abweichungen, falls das Laminat eine Dehnungs-Scherungs-Kopplung besitzt.

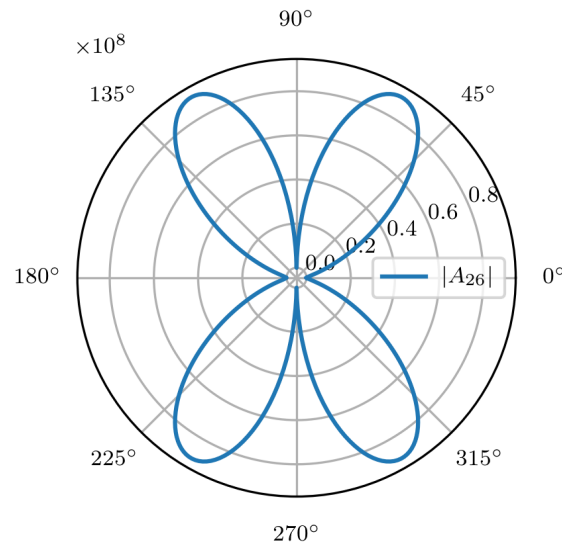


Abbildung 6.3.: Betrag des Scheibensteifigkeits-Koeffizient A_{26} über dem Faserwinkel

6.1.3. Einfluss der Elementlänge

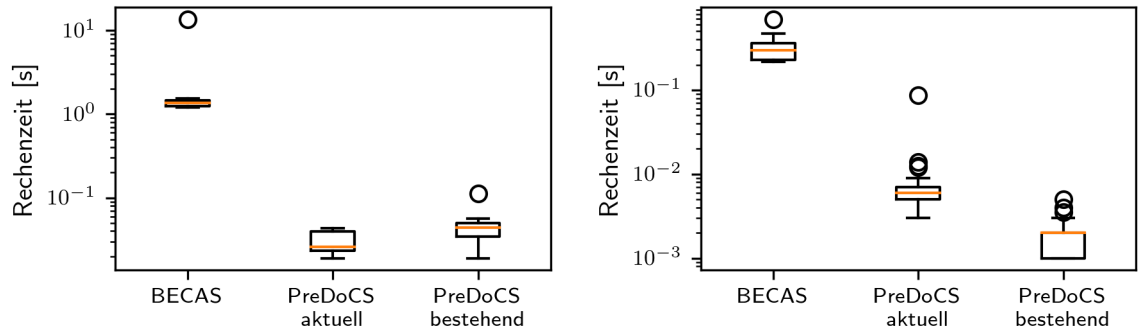
Auffällig bei der Betrachtung der Steifigkeits-Koeffizienten über der Elementlänge ist, dass die Ergebnisse von PreDoCS in keinsten Weise abhängig von der Elementlänge sind und sich die Ergebnisse von BECAS bei kleinerer Elementlänge den PreDoCS-Ergebnissen nähern. Der Grund, warum die BECAS Ergebnisse von der Elementlänge abhängig sind, ist, dass dort ein FE-Ansatz verwendet wird. Die Verformungen des Querschnitts werden mit Hilfe von finiten Elementen und den dazugehörigen Formfunktionen beschrieben, die bei den verwendeten Q4-Elementen linear sind. Somit muss die Kontur aus vielen Elementen bestehen, um die wirkliche nicht lineare Verformung mit diesen finiten Elementen abbilden zu können. PreDoCS verwendet zwar ebenfalls Elemente, diese sind aber keine finiten Elemente. Sie dienen ausschließlich dazu, Kontur-Abschnitte geometrisch zu beschreiben. Wird ein Querschnitt berechnet, der ausschließlich aus geraden Teil-Segmenten aufgebaut ist, würde es reichen, jedes Teil-Segment für die Berechnung mit PreDoCS mit nur einem Element auszustatten. Diskretisierungsfehler werden mit PreDoCS nur gemacht, wenn eine gekrümmte Kontur durch die geraden Elemente angenähert werden muss.

Da sich die Anzahl der Elemente natürlich auch auf die Rechenzeit auswirkt, ist es ein Vorteil von PreDoCS gegenüber BECAS, die selbe Genauigkeit mit nur einem Bruchteil der Anzahl der Elemente erreichen zu können.

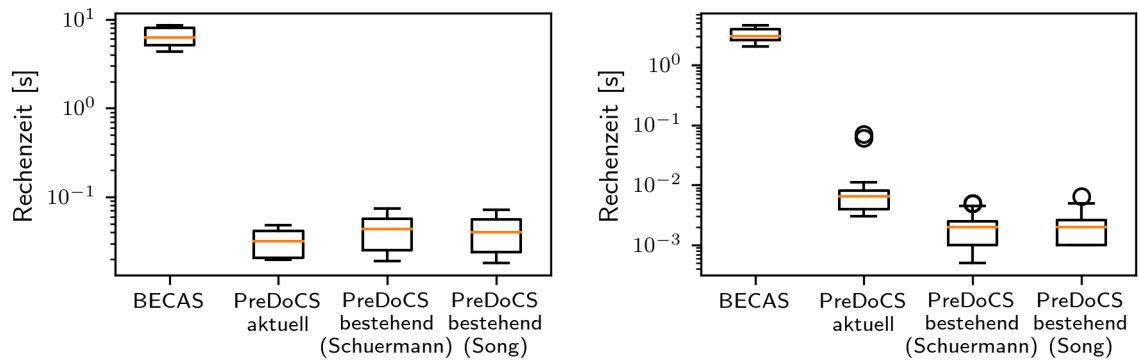
6.2. Rechenzeit

Die Anforderung aus Abschnitt 1.2 hinsichtlich der Rechenzeit war, dass ein Querschnitt unter 100 Lastfällen in unter einer Minute berechnet werden muss. In Abbildung 6.4 sind die Zeiten zur Berechnung der Querschnittseigenschaften und eines

Lastfalles für die Querschnitte aus isotropem Material und Faserverbund-Material als Boxplots dargestellt. Die Werte wurden auf einem PC unter Windows 10 Pro 64-Bit mit einem Intel Core i5-4210U Prozessor (2x max. 2,7 GHz) und 8 GB Arbeitsspeicher ermittelt. Die verwendete Version von BECAS ist Version 3.3.



(a) Rechenzeit für die einmalige Querschnittsberechnung (isotropes Material) (b) Rechenzeit für die Berechnung eines Lastfalles (isotropes Material)



(c) Rechenzeit für die einmalige Querschnittsberechnung (Faserverbund-Material) (d) Rechenzeit für die Berechnung eines Lastfalles (Faserverbund-Material)

Abbildung 6.4.: Vergleich der Rechenzeiten der Ansätze

Es ist zu sehen, dass die Berechnung für isotrope Querschnitte in PreDoCS ungefähr um eine Größenordnung schneller ist als in BECAS, Berechnung von Querschnitten aus Faserverbund-Materialien ungefähr zwei Größenordnungen. Die Berechnung eines Lastfalles ist in PreDoCS um zwei Größenordnungen schneller als in BECAS.

Werden die Querschnitts- und Lastfallberechnungen für einen Querschnitt und 100 Lastfälle addiert, so benötigt PreDoCS für Querschnitte aus isotropem und Faserverbund-Material rund 0,8sec. BECAS hingegen benötigt für Querschnitte aus isotropem Material rund 20sec, für Faserverbund-Materialien rund 200sec.

Da die Werte für die Berechnung eines Querschnitts unter 100 Lastfällen mit PreDoCS unter einer Sekunde liegt, ist diese Anforderung erfüllt.

7. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein Modul für die Berechnung von Querschnittssteifigkeiten für das Vorauslegungstool PreDocCS entwickelt. Es können dünnwandige geschlossene mehrzellige Querschnitte aus Faserverbund-Materialien berechnet werden. Dabei wird eine 6x6-Steifigkeitsmatrix ermittelt, die die Steifigkeiten für die Freiheitsgrade Querkraft in zwei Richtungen, Längsdehnung, Biegung um zwei Achsen und Torsion beinhaltet. Zusätzlich werden alle Koppelsteifigkeiten dieser Freiheitsgrade bestimmt. Die Berechnung ist aufgrund des analytischen Ansatzes sehr schnell und dauert für einen Querschnitt unter 100 Lastfällen auf einem gewöhnlichen PC weniger als eine Sekunde.

Die Ergebnisse des Moduls wurden für ausgewählte Testquerschnitte mit den Ergebnissen des 2D-FE-Tools BECAS und dem bestehenden PreDoCS-Modul verglichen. Alle Steifigkeiten außer der beiden Schubsteifigkeiten und den zugehörigen Koppelsteifigkeiten besitzen eine Genauigkeit bezogen auf die BECAS-Ergebnisse, die für ein Vorauslegungstool voll ausreichend ist. Es wurde gezeigt, dass die fehlerhaften Schubsteifigkeiten aus den vereinfachten Annahmen der Schubtheorie erster Ordnung („Timoschenko-Theorie“) resultieren. Um die Abweichung der Schubsteifigkeiten zu beseitigen, können wie bei Schubtheorien erster Ordnung üblich, Schubkorrekturfaktoren angewandt werden. Die Berechnung dieser, auch für Querschnitte aus Faserverbund-Materialien, ist noch zu untersuchen.

Mit Hilfe der Wiederherstellungsbeziehungen ist es möglich, aus einer gegebenen Verformung des Querschnitts die Verformungen und Kraft- und Momentenflussverläufe über der Kontur und auch Dehnungen und Spannungen in den einzelnen Laminatschichten zu berechnen. Diese Verläufe stimmen sehr gut mit denen von BECAS überein, außer die Schubflussverläufe durch Querkraft. Aufgrund der nicht korrekten Schubflussverläufe durch Querkraft können falsche Aussagen hinsichtlich der Festigkeit unter einer Belastung durch Querkraft getroffen werden, da die Festigkeitsanalyse unter anderem auf diesen Schubflussverläufen basiert. Ein besserer Verlauf der Schubflüsse durch Querkraft kann erreicht werden, indem eine Schubtheorie höherer Ordnung verwendet wird. Des Weiteren gibt es Ansätze, die die Herleitung der Querschnittssteifigkeiten mit einer Spannungs-Formulierung erreichen. Diese Ansätze erzeugen bessere Schubflussverläufe als Ansätze, die die Querschnittsteifigkeiten mit einer Verformungs-Formulierung herleiten [18]. Ebenfalls gute Ergebnisse versprechen Ansätze, die beide Formulierungen kombinieren [17].

Außerdem wurde der Einfluss des Faserwinkels auf die Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix anhand eines Rechteckquerschnitts in CAS-Anordnung untersucht. Die Verläufe des zu entwickelnden PreDoCS-Moduls stimmen sehr gut mit den Ergebnissen von BECAS überein. Auch das bestehende PreDoCS-Modul mit dem Berechnungsansatz nach Song für den Elastizitäts- und Schubmodul stimmt gut mit den BECAS-Ergebnissen überein. Nur bei der Verwendung des Berechnungsansatzes nach Schürmann für den Elastizitäts- und Schubmodul kommt es bei bestimmten Faserwinkeln zu erheblichen Abweichungen. Diese entstehen durch die Dehnungs-Scherungs-Kopplung des Laminats.

Ebenfalls an einem Rechteckquerschnitt wurde der Einfluss der Elementgröße auf die berechneten Steifigkeiten untersucht. Dabei ist festzustellen, dass die Elementgröße keinen Einfluss auf die PreDoCS-Ergebnisse hat, sehrwohl aber auf die Ergebnisse, die mit BECAS erzielt wurden.

Noch zu untersuchen ist der Einfluss von vorverdrehen und vorgebogenen Balken, beispielsweise Windkraft-Rotorblätter mit Pre-Bend. Dabei sind die Rotorblätter im unbelasteten Zustand vom Turm der Windkraftanlage weggebogen, um unter Belastung einen ausreichenden Abstand zum Turm zu gewährleisten. In der Literatur existieren Ansätze, die vorverdrehte und vorgebogene Balken berechnen können, siehe dazu Abschnitt 2.1.

Auch bisher unberücksichtigt geblieben sind Versteifungen der Kontur, die in Flugzeug-Flügeln sehr häufig in Form von Stringern und Rippen zu finden sind (Abbildung 1.2).

Literatur

- [1] Carsten Braun. *Aircraft Design 1: Summer Term 2016*.
- [2] Daniel P. Raymer. *Enhancing aircraft conceptual design using multidisciplinary optimization*. Bd. 2002:2. Report / Royal Institute of Technology, Department of Aeronautics. Stockholm: Tekniska högsk, 2002. ISBN: 91-7283-259-2.
- [3] Erich Hau. *Windkraftanlagen: Grundlagen. Technik. Einsatz. Wirtschaftlichkeit*. 6th ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2017. ISBN: 978-3-662-53154-9. URL: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/gbv/detail.action?docID=4818780>.
- [4] Sung Nam Jung, V. T. Nagaraj und Inderjit Chopra. „Assessment of Composite Rotor Blade Modeling Techniques“. In: *Journal of the American Helicopter Society* 44.3 (1999), S. 188–205. ISSN: 00028711. DOI: 10.4050/JAHS.44.188.
- [5] Terrence A. Weisshaar. *Aeroelastic Stability and Performance Characteristics of Aircraft with Advanced Composite Sweptforward Wing Structures*. 1978. URL: <http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?AD=ADB032318&Location=U2&doc=GetTRDoc.pdf>.
- [6] Robert Millard Jones. *Mechanics of composite materials*. 2. ed. New York: Taylor & Francis, 1999. ISBN: 1-56032-712-X. URL: <http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy0647/98018290-d.html>.
- [7] VDI-Gesellschaft Materials Engineering. *Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund - Berechnungen*. Düsseldorf, 2006-09. URL: https://www.vdi.de/nc/richtlinie/vdi_2014_blat_3-entwicklung_von_bauteilen_aus_faser_kunststoff_verbund_berechnungen/.
- [8] Helmut Schürmann. *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. 2., bearbeitete und erweiterte Auflage. VDI-Buch. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 978-3-540-72189-5. DOI: 10.1007/978-3-540-72190-1. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-72190-1>.
- [9] Dewey H. Hodges. *Nonlinear Composite Beam Theory*. Reston ,VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006. ISBN: 978-1-56347-697-6. DOI: 10.2514/4.866821.
- [10] Perngjin F. Pai und Ali H. Nayfeh. „A nonlinear composite beam theory“. In: *Nonlinear Dynamics* 3.4 (1992), S. 273–303. DOI: 10.1007/BF00045486.

- [11] Rakesh K. Kapania und Stefano Raciti. „Recent advances in analysis of laminated beams and plates. Part I - Sheareffects and buckling“. In: *AIAA Journal* 27.7 (1989), S. 923–935. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/3.10202.
- [12] Y. M. Ghugal und R. P. Shimpi. „A Review of Refined Shear Deformation Theories for Isotropic and Anisotropic Laminated Beams“. In: *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 20.3 (2016), S. 255–272. ISSN: 0731-6844. DOI: 10.1177/073168401772678283.
- [13] Wikipedia, Hrsg. *Eta (Flugzeug)*. 14.02.2018. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=172321384>.
- [14] Wikipedia, Hrsg. *Windkraftanlage*. 17.02.2018. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=174120270>.
- [15] Hui Chen, Wenbin Yu und Mark Capellaro. „A critical assessment of computer tools for calculating composite wind turbine blade properties“. In: *Wind Energy* 13.6 (2010), S. 497–516. ISSN: 10954244. DOI: 10.1002/we.372.
- [16] Martín C. Saravia, L. Joaquín Saravia und Víctor H. Cortínez. „A one dimensional discrete approach for the determination of the cross sectional properties of composite rotor blades“. In: *Renewable Energy* 80 (2015), S. 713–723. ISSN: 09601481. DOI: 10.1016/j.renene.2015.02.046.
- [17] Sung Nam Jung, V. T. Nagaraj und Inderjit Chopra. „Refined Structural Model for Thin- and Thick-Walled Composite Rotor Blades“. In: *AIAA Journal* 40.1 (2002), S. 105–116. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/2.1619.
- [18] E. R. Johnson, V. V. Vasiliev und D. V. Vasiliev. „Anisotropic Thin-Walled Beams with Closed Cross-Sectional Contours“. In: *AIAA Journal* 39.12 (2001), S. 2389–2393. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/2.1247.
- [19] José Pedro Albergaria Amaral Blasques, Mathias Stolpe, Christian Berggreen und Kim Branner. „Optimal Design of Laminated Composite Beams“. Diss. 2011.
- [20] G. S. Bir. *User's Guide to PreComp (Pre-Processor for Computing Composite Blade Properties)*. 2006. DOI: 10.2172/876556. URL: <https://www.osti.gov/scitech/servlets/purl/876556>.
- [21] Wenbin Yu. „Efficient High-Fidelity Simulation of Multibody Systems with Composite Dimensionally Reducible Components“. In: *Journal of the American Helicopter Society* 52.1 (2007), S. 49–57. ISSN: 00028711. DOI: 10.4050/JAHS.52.49.

-
- [22] T. P. Philippidis, A. P. Vassilopoulos, K. G. Katopis und S. G. Voutsinas. „THIN/PROBEAM: A Software for Fatigue Design and Analysis of Composite Rotor Blades“. In: *Wind Engineering* 20.5 (1996), S. 349–362. URL: <http://www.jstor.org/stable/43749625>.
 - [23] David J. Malcolm und Daniel L. Laird. „Extraction of equivalent beam properties from blade models“. In: *Wind Energy* 10.2 (2007), S. 135–157. ISSN: 10954244. DOI: 10.1002/we.213.
 - [24] Ramesh Chandra und Inderjit Chopra. „Structural behavior of two-cell composite rotor blades with elastic couplings“. In: *AIAA Journal* 30.12 (1992), S. 2914–2921. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/3.11637.
 - [25] Michael Dugas. *Ein Beitrag zur Auslegung von Faserverbundtragflügeln im Vorwurf*. 2002. DOI: 10.18419/opus-3672.
 - [26] Cheol Kim und Scott R. White. „Thick-walled composite beam theory including 3-d elastic effects and torsional warping“. In: *International Journal of Solids and Structures* 34.31-32 (1997), S. 4237–4259. ISSN: 00207683. DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00072-8.
 - [27] Charles Libove. „Stresses and rate of twist in single-cell thin-walled beams with anisotropic walls“. In: *AIAA Journal* 26.9 (1988), S. 1107–1118. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/3.10018.
 - [28] E. H. Mansfield und A. J. Sobey. „The Fibre Composite Helicopter Blade“. In: *Aeronautical Quarterly* 30.02 (1979), S. 413–449. ISSN: 0001-9259. DOI: 10.1017/S0001925900008623.
 - [29] Zhanming Qin und Liviu Librescu. „On a shear-deformable theory of anisotropic thin-walled beams: Further contribution and validations“. In: *Composite Structures* 56.4 (2002), S. 345–358. ISSN: 02638223. DOI: 10.1016/S0263-8223(02)00019-3.
 - [30] Lawrence W. Rehfield, Ali R. Atilgan und Dewey H. Hodges. „Nonclassical Behavior of Thin-Walled Composite Beams with Closed Cross Sections“. In: *Journal of the American Helicopter Society* 35.2 (1990), S. 42–50. ISSN: 00028711. DOI: 10.4050/JAHS.35.42.
 - [31] Thuc Phuong Vo und Jaehong Lee. „Flexural–torsional behavior of thin-walled composite box beams using shear-deformable beam theory“. In: *Engineering Structures* 30.7 (2008), S. 1958–1968. ISSN: 01410296. DOI: 10.1016/j.engstruct.2007.12.003.
 - [32] Jaehong Lee. „Flexural analysis of thin-walled composite beams using shear-deformable beam theory“. In: *Composite Structures* 70.2 (2005), S. 212–222. ISSN: 02638223. DOI: 10.1016/j.compstruct.2004.08.023.

- [33] Liviu Librescu und Ohseop Song. „Behavior of Thin-Walled Beams Made of Advanced Composite Materials and Incorporating Non-Classical Effects“. In: *Applied Mechanics Reviews* 44.11S (1991), S174. ISSN: 00036900. DOI: 10.1115/1.3121352.
- [34] Ohseop Song. „Modeling and response analysis of thin-walled beam structures constructed of advanced composite materials“. Diss. URL: https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/10919/38952/1/LD5655.V856_1990.S665.pdf.
- [35] J. K. Suresh und V. T. Nagaraj. „Higher-order shear deformation theory for thin-walled composite beams“. In: *Journal of Aircraft* 33.5 (1996), S. 978–986. ISSN: 0021-8669. DOI: 10.2514/3.47044.
- [36] Martín Saravia. „Calculation of the Cross Sectional Properties of Large Wind Turbine Blades“. In: *Mecánica Computacional* Volume XXXIV. Number 54. Numerical Methods in Advanced Applications (2016), S. 3619–3635. URL: <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/issue/view/876>.
- [37] V. Giavotto u. a. „Anisotropic beam theory and applications“. In: *Computers & Structures* 16.1-4 (1983), S. 403–413. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/0045-7949(83)90179-7.
- [38] José Pedro Albergaria Amaral Blasques und Mathias Stolpe. „Multi-material topology optimization of laminated composite beam cross sections“. In: *Composite Structures* 94 (2012), S. 3278–3289. ISSN: 02638223. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.05.002.
- [39] Marco Borri, Gian L. Ghiringhelli und Teodoro Merlini. *Composite Beam Analysis Linear Analysis of Naturally Curved and Twisted Anisotropic Beams*. 1992. URL: <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a252652.pdf>.
- [40] Rolf Mahnken. *Lehrbuch der technischen Mechanik - Elastostatik: Mit einer Einführung in Hybridstrukturen*. Berlin: Springer Vieweg, 2015. ISBN: 978-3-662-44798-7. DOI: 10.1007/978-3-662-44798-7. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-44798-7>.
- [41] Johannes Wiedemann. *Leichtbau: Elemente und Konstruktion*. 3. Auflage. Klassiker der Technik. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 3-540-33656-7. DOI: 10.1007/978-3-540-33657-0. URL: <http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=10172875>.
- [42] O. Stodieck, J. E. Cooper und P. M. Weaver. „Interpretation of Bending/Torsion Coupling for Swept, Nonhomogenous Wings“. In: *Journal of Aircraft* 53.4 (2016), S. 892–899. ISSN: 0021-8669. DOI: 10.2514/1.C033186.

-
- [43] Daniel Hardt. „Entwicklung eines Tools zur Querschnittsberechnung von isotropen Flügelstrukturen“. 11.01.2018.
- [44] Steen Krenk und Philippe J. Couturier. „Equilibrium-Based Nonhomogeneous Anisotropic Beam Element“. In: *AIAA Journal* 55.8 (2017), S. 2773–2782. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/1.J055884.
- [45] José Pedro Blasques. *User’s Manual for BECAS: A cross section analysis tool for anisotropic and inhomogeneous beam sections of arbitrary geometry*. 2015.
- [46] Otto Fuchs KG. *Al Zn 6 Cu Mg Zr - EN AW-7050 nach DIN EN 573 57*. URL: <https://www.otto-fuchs.com/de/technologien/werkstoffe/aluminium.html>.
- [47] F. Gruttmann und W. Wagner. „Shear correction factors in Timoshenko’s beam theory for arbitrary shaped cross-sections“. In: *Computational Mechanics* 27.3 (2001), S. 199–207. ISSN: 1432-0924. DOI: 10.1007/s004660100239.
- [48] G. R. Cowper. „The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory“. In: *Journal of Applied Mechanics* 33.2 (1966), S. 335. ISSN: 00218936. DOI: 10.1115/1.3625046.
- [49] Lawrence C. Bank. „Shear coefficients for thin-walled composite beams“. In: *Composite Structures* 8.1 (1987), S. 47–61. ISSN: 02638223. DOI: 10.1016/0263-8223(87)90015-8.
- [50] Lawrence C. Bank und Thomas P. Melehan. „Shear coefficients for multicelled thin-walled composite beams“. In: *Composite Structures* 11.4 (1989), S. 259–276. ISSN: 02638223. DOI: 10.1016/0263-8223(89)90091-3.
- [51] Seung Jo Kim, Ki Won Yoon und Sung Nam Jung. „Shear Correction Factors for Thin-Walled Composite Boxbeam Considering Nonclassical Behaviors“. In: *Journal of Composite Materials* 30.10 (2016), S. 1132–1149. ISSN: 0021-9983. DOI: 10.1177/002199839603001004.
- [52] L. Marín u. a. „Optimization of composite stiffened panels under mechanical and hygrothermal loads using neural networks and genetic algorithms“. In: *Composite Structures* 94.11 (2012), S. 3321–3326. ISSN: 02638223. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.04.024.

Anhang

A. Material-Steifigkeitskoeffizienten

$$\begin{aligned}K_{11} &= -\frac{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}}{A_{11}} \\K_{12} &= -\frac{A_{12}A_{16} - A_{11}A_{26}}{A_{11}} \\K_{13} &= -\frac{A_{12}B_{12} - A_{11}B_{22}}{A_{11}} \\K_{21} &= -\frac{A_{12}A_{16} - A_{11}A_{26}}{A_{11}} \\K_{22} &= -\frac{A_{16}^2 - A_{11}A_{66}}{A_{11}} \\K_{23} &= -\frac{A_{16}B_{12} - A_{11}B_{26}}{A_{11}} \\K_{31} &= -\frac{A_{12}B_{12} - A_{11}B_{22}}{A_{11}} \\K_{32} &= -\frac{A_{16}B_{12} - A_{11}B_{26}}{A_{11}} \\K_{33} &= -\frac{B_{12}^2 - A_{11}D_{22}}{A_{11}} \\K_{41} &= -\frac{A_{12}B_{16} - A_{11}B_{26}}{A_{11}} \\K_{42} &= -\frac{A_{16}B_{16} - A_{11}B_{66}}{A_{11}} \\K_{43} &= -\frac{B_{12}B_{16} - A_{11}D_{26}}{A_{11}}\end{aligned}$$

B. Querschnitts-Steifigkeitskoeffizienten

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \int_C \left[K_{22} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \right] ds \\
S_{12} &= \int_C \left[K_{22} \frac{dx}{ds} \frac{dx}{dy} \right] ds \\
S_{13} &= \int_C \left[K_{21} \frac{dx}{ds} \right] ds \\
S_{14} &= \int_C \left[K_{21} y \frac{dx}{ds} - K_{23} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \right] ds \\
S_{15} &= \int_C \left[-K_{21} x \frac{dx}{ds} - K_{23} \frac{dx}{ds} \frac{dx}{dy} \right] ds \\
S_{16} &= \int_C \left[K_{22} \psi \frac{dx}{ds} \right] ds \\
S_{22} &= \int_C \left[K_{22} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right] ds \\
S_{23} &= \int_C \left[K_{21} \frac{dx}{dy} \right] ds \\
S_{24} &= \int_C \left[\left(K_{21} y - K_{23} \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx}{dy} \right] ds \\
S_{25} &= \int_C \left[-K_{21} x \frac{dx}{dy} - K_{23} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right] ds \\
S_{26} &= \int_C \left[K_{22} \psi \frac{dx}{dy} \right] ds \\
S_{33} &= \int_C [K_{11}] ds \\
S_{34} &= \int_C \left[K_{11} y - K_{13} \frac{dx}{ds} \right] ds \\
S_{35} &= \int_C \left[-K_{11} x - K_{13} \frac{dx}{dy} \right] ds \\
S_{36} &= \int_C [K_{12} \psi] ds \\
S_{44} &= \int_C \left[K_{11} y^2 - (K_{13} + K_{41}) y \frac{dx}{ds} + K_{43} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \right] ds \\
S_{45} &= \int_C \left[-K_{11} x y + K_{41} x \frac{dx}{ds} - \left(K_{13} y - K_{43} \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx}{dy} \right] ds \\
S_{46} &= \int_C \left[K_{12} \psi y - K_{42} \psi \frac{dx}{ds} \right] ds \\
S_{55} &= \int_C \left[K_{11} x^2 + (K_{13} + K_{41}) x \frac{dx}{dy} + K_{43} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right] ds \\
S_{56} &= \int_C \left[-K_{12} \psi x - K_{42} \psi \frac{dx}{dy} \right] ds \\
S_{66} &= \int_C [K_{22} \psi^2] ds
\end{aligned}$$

C. Materialdaten

Tabelle C.1.: Materialdaten der Faserverbund-Schichten

Größe	Einheit	Hexcel T800/M21[52]
t	[mm]	0,184
E_1	[GPa]	134,7
$E_2 = E_3$	[GPa]	7,7
$\nu_{12} = \nu_{13}$	[-]	0,369
ν_{23}	[-]	0,5
$G_{12} = G_{13}$	[GPa]	4,2
G_{23}	[GPa]	2,5

Tabelle C.2.: Laminat L1

Lage	Material	Winkel [°]	Lagendicke [mm]
1	Hexcel T800/M21	0	0,184
2	Hexcel T800/M21	0	0,184
3	Hexcel T800/M21	45	0,184
4	Hexcel T800/M21	0	0,184
5	Hexcel T800/M21	-45	0,184
6	Hexcel T800/M21	90	0,184
7	Hexcel T800/M21	90	0,184
8	Hexcel T800/M21	-45	0,184
9	Hexcel T800/M21	0	0,184
10	Hexcel T800/M21	45	0,184
11	Hexcel T800/M21	0	0,184
12	Hexcel T800/M21	0	0,184
Gesamtdicke des Laminats:			2,208

Tabelle C.3.: Laminat L2

Lage	Material	Winkel [°]	Lagendicke [mm]
1	Hexcel T800/M21	0	0,184
2	Hexcel T800/M21	0	0,184
3	Hexcel T800/M21	45	0,184
4	Hexcel T800/M21	0	0,184
5	Hexcel T800/M21	0	0,184
6	Hexcel T800/M21	−45	0,184
7	Hexcel T800/M21	0	0,184
8	Hexcel T800/M21	45	0,184
9	Hexcel T800/M21	90	0,184
10	Hexcel T800/M21	−45	0,184
11	Hexcel T800/M21	90	0,184
12	Hexcel T800/M21	90	0,184
13	Hexcel T800/M21	−45	0,184
14	Hexcel T800/M21	90	0,184
15	Hexcel T800/M21	45	0,184
16	Hexcel T800/M21	0	0,184
17	Hexcel T800/M21	0	0,184
18	Hexcel T800/M21	0	0,184
19	Hexcel T800/M21	−45	0,184
20	Hexcel T800/M21	0	0,184
21	Hexcel T800/M21	0	0,184
22	Hexcel T800/M21	45	0,184
23	Hexcel T800/M21	0	0,184
24	Hexcel T800/M21	0	0,184
Gesamtdicke des Laminats:			4,416

D. Qualitative Bewertungskriterien zur Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse

Tabelle D.4.: Qualitative Bewertungskriterien zur Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse der Berechnung der Test-Querschnitte aus isotropem Material

Aspekt	Beschreibung
elastischer Schwerpunkt	wandert in Richtung eines Elementes, wenn E oder t erhöht werden
Hauptachsensystem	liegt im elastischen Schwerpunkt Hauptachsen liegt in der/den Symmetriachsen
Normalfluss durch Normalkraft	Skaliert die Dehnung (konstant über dem Querschnitt) mit E und t richtiges Vorzeichen?
Normalfluss durch Biegemoment um die Hauptachsen	Skaliert die Dehnung (linearer Verlauf senkrecht zu Biegeachse) mit E und t keine Spannung in der Biegeachse (neutrale Faser) richtiges Vorzeichen?
Schubflüsse	
Schubmittelpunkt	liegt auf der/den Symmetriachsen bei geschlossenen Profilen innerhalb des Querschnittes wandert in Richtung eines Elementes, wenn G oder t erhöht werden wandert in Richtung eines verschobenen Stegs
Schubfluss durch Torsion	umlaufender Schubfluss in einer Zelle konstant richtige Richtung?
Schubfluss durch Querkraft in Hautachsenrichtung	parabolischer Verlauf in Kraftrichtung linearer Verlauf senkrecht zur Kraftrichtung Steigung am Schnittpunkt mit der Hauptachse = 0

E. Vergleich anhand von Querschnitten aus isotropem Material

Tabelle E.5.: Testfall 100

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
x_{SMP} [m]	0,000	-0,002	-0,20	0,000	0,00
y_{SMP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,609	-	-	-
K_y [-]	-	0,222	-	-	-
S_{11}	$9,830 \cdot 10^7$	$1,614 \cdot 10^8$	64,15	-	-
S_{22}	$3,580 \cdot 10^7$	$1,614 \cdot 10^8$	350,70	-	-
S_{33}	$4,244 \cdot 10^8$	$4,260 \cdot 10^8$	0,39	$4,260 \cdot 10^8$	0,39
S_{44}	$2,047 \cdot 10^7$	$2,057 \cdot 10^7$	0,49	$2,057 \cdot 10^7$	0,49
S_{55}	$5,862 \cdot 10^7$	$5,902 \cdot 10^7$	0,69	$5,902 \cdot 10^7$	0,69
S_{66}	$1,776 \cdot 10^7$	$1,773 \cdot 10^7$	-0,20	$1,773 \cdot 10^7$	-0,20

Tabelle E.6.: Testfall 101

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
x_{SMP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{SMP} [m]	0,000	-0,001	-0,12	0,000	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,523	-	-	-
K_y [-]	-	0,353	-	-	-
S_{11}	$9,839 \cdot 10^7$	$1,883 \cdot 10^8$	91,33	-	-
S_{22}	$6,640 \cdot 10^7$	$1,883 \cdot 10^8$	183,50	-	-
S_{33}	$4,951 \cdot 10^8$	$4,970 \cdot 10^8$	0,39	$4,970 \cdot 10^8$	0,39
S_{44}	$2,193 \cdot 10^7$	$2,205 \cdot 10^7$	0,54	$2,205 \cdot 10^7$	0,54
S_{55}	$5,862 \cdot 10^7$	$5,902 \cdot 10^7$	0,69	$5,902 \cdot 10^7$	0,69
S_{66}	$1,777 \cdot 10^7$	$1,773 \cdot 10^7$	-0,22	$1,773 \cdot 10^7$	-0,22
S_{26}	$2,025 \cdot 10^4$	0,000	-100,00	-	-
η_{26}	$5,895 \cdot 10^{-4}$	0,000	-100,00	-	-

Tabelle E.7.: Testfall 102

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,038	0,038	0,00	0,038	0,00
y_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
x_{SMP} [m]	0,012	0,012	-0,09	0,013	0,01
y_{SMP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,516	-	-	-
K_y [-]	-	0,329	-	-	-
S_{11}	$9,717 \cdot 10^7$	$1,883 \cdot 10^8$	93,74	-	-
S_{22}	$6,193 \cdot 10^7$	$1,883 \cdot 10^8$	204,01	-	-
S_{33}	$4,951 \cdot 10^8$	$4,970 \cdot 10^8$	0,39	$4,970 \cdot 10^8$	0,39
S_{44}	$2,193 \cdot 10^7$	$2,205 \cdot 10^7$	0,54	$2,205 \cdot 10^7$	0,54
S_{55}	$6,176 \cdot 10^7$	$6,218 \cdot 10^7$	0,68	$6,218 \cdot 10^7$	0,68
S_{66}	$1,798 \cdot 10^7$	$1,793 \cdot 10^7$	-0,25	$1,793 \cdot 10^7$	-0,25
S_{26}	$7,723 \cdot 10^5$	0,000	-100,00	-	-
S_{35}	$-1,886 \cdot 10^7$	$-1,893 \cdot 10^7$	0,37	$-1,893 \cdot 10^7$	0,37
η_{26}	$2,315 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-
η_{35}	$-1,079 \cdot 10^{-1}$	$-1,077 \cdot 10^{-1}$	-0,16	$-1,077 \cdot 10^{-1}$	-0,16

Tabelle E.8.: Testfall 103

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
x_{SMP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{SMP} [m]	0,000	-0,001	-0,11	0,000	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,445	-	-	-
K_y [-]	-	0,434	-	-	-
S_{11}	$9,574 \cdot 10^7$	$2,152 \cdot 10^8$	124,73	-	-
S_{22}	$9,335 \cdot 10^7$	$2,152 \cdot 10^8$	130,48	-	-
S_{33}	$5,658 \cdot 10^8$	$5,680 \cdot 10^8$	0,39	$5,680 \cdot 10^8$	0,39
S_{44}	$2,339 \cdot 10^7$	$2,353 \cdot 10^7$	0,58	$2,352 \cdot 10^7$	0,58
S_{55}	$6,428 \cdot 10^7$	$6,470 \cdot 10^7$	0,67	$6,470 \cdot 10^7$	0,67
S_{66}	$1,838 \cdot 10^7$	$1,834 \cdot 10^7$	-0,24	$1,834 \cdot 10^7$	-0,24
S_{26}	$4,270 \cdot 10^4$	0,000	-100,00	-	-
S_{35}	$-1,882 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	0,000	-100,00
η_{26}	$1,031 \cdot 10^{-3}$	0,000	-100,00	-	-
η_{35}	$-9,867 \cdot 10^{-6}$	0,000	-100,00	0,000	-100,00

Tabelle E.9.: Testfall 104

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,163	0,163	0,01	0,163	0,01
y_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
x_{SMP} [m]	0,013	0,026	1,34	0,011	-0,19
y_{SMP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,776	-	-	-
K_y [-]	-	0,050	-	-	-
S_{11}	$9,005 \cdot 10^7$	$1,160 \cdot 10^8$	28,85	-	-
S_{22}	$5,836 \cdot 10^6$	$1,160 \cdot 10^8$	1887,93	-	-
S_{33}	$3,049 \cdot 10^8$	$3,063 \cdot 10^8$	0,46	$3,063 \cdot 10^8$	0,46
S_{44}	$5,577 \cdot 10^5$	$5,590 \cdot 10^5$	0,23	$5,589 \cdot 10^5$	0,21
S_{55}	$3,287 \cdot 10^7$	$3,318 \cdot 10^7$	0,93	$3,318 \cdot 10^7$	0,93
S_{66}	$6,972 \cdot 10^5$	$6,933 \cdot 10^5$	-0,56	$6,933 \cdot 10^5$	-0,56
S_{26}	$7,489 \cdot 10^4$	0,000	-100,00	-	-
S_{35}	$-4,974 \cdot 10^7$	$-4,999 \cdot 10^7$	0,50	$-4,999 \cdot 10^7$	0,50
η_{26}	$3,712 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-
η_{35}	$-4,968 \cdot 10^{-1}$	$-4,958 \cdot 10^{-1}$	-0,19	$-4,958 \cdot 10^{-1}$	-0,19

Tabelle E.10.: Testfall 105

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,161	0,161	0,01	0,161	0,01
y_{ESP} [m]	-0,012	-0,012	0,00	-0,012	0,00
x_{SMP} [m]	0,012	0,026	1,32	0,011	-0,18
y_{SMP} [m]	-0,002	-0,002	0,00	-0,002	0,00
HAW [°]	-0,2	89,7	-	89,7	-
K_x [-]	-	0,775	-	-	-
K_y [-]	-	0,051	-	-	-
S_{11}	$9,003 \cdot 10^7$	$1,161 \cdot 10^8$	28,99	-	-
S_{22}	$5,967 \cdot 10^6$	$1,161 \cdot 10^8$	1846,20	-	-
S_{33}	$3,052 \cdot 10^8$	$3,066 \cdot 10^8$	0,46	$3,066 \cdot 10^8$	0,46
S_{44}	$6,127 \cdot 10^5$	$6,146 \cdot 10^5$	0,31	$6,145 \cdot 10^5$	0,29
S_{55}	$3,273 \cdot 10^7$	$3,303 \cdot 10^7$	0,93	$3,303 \cdot 10^7$	0,93
S_{66}	$6,980 \cdot 10^5$	$6,938 \cdot 10^5$	-0,60	$6,938 \cdot 10^5$	-0,60
S_{12}	$-2,822 \cdot 10^5$	0,000	-100,00	-	-
S_{16}	$1,688 \cdot 10^5$	0,000	-100,00	-	-
S_{26}	$7,360 \cdot 10^4$	0,000	-100,00	-	-
S_{34}	$-3,650 \cdot 10^6$	$-3,676 \cdot 10^6$	0,73	$-3,676 \cdot 10^6$	0,73
S_{35}	$-4,916 \cdot 10^7$	$-4,941 \cdot 10^7$	0,50	$-4,941 \cdot 10^7$	0,50
S_{45}	$6,935 \cdot 10^5$	$6,996 \cdot 10^5$	0,87	$6,996 \cdot 10^5$	0,87
η_{12}	$-1,218 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-
η_{16}	$2,129 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-
η_{26}	$3,606 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-
η_{34}	$-2,669 \cdot 10^{-1}$	$-2,678 \cdot 10^{-1}$	0,34	$-2,678 \cdot 10^{-1}$	0,35
η_{35}	$-4,919 \cdot 10^{-1}$	$-4,910 \cdot 10^{-1}$	-0,19	$-4,910 \cdot 10^{-1}$	-0,19
η_{45}	$1,549 \cdot 10^{-1}$	$1,553 \cdot 10^{-1}$	0,25	$1,553 \cdot 10^{-1}$	0,26

Tabelle E.11.: Testfall 106

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,134	0,134	0,00	0,134	0,00
y_{ESP} [m]	-0,012	-0,012	0,00	-0,012	0,00
x_{SMP} [m]	0,010	0,022	1,23	0,008	-0,18
y_{SMP} [m]	-0,002	-0,002	0,00	-0,002	0,00
HAW [°]	-0,3	89,7	-	89,7	-
K_x [-]	-	0,733	-	-	-
K_y [-]	-	0,081	-	-	-
S_{11}	$8,950 \cdot 10^7$	$1,220 \cdot 10^8$	36,34	-	-
S_{22}	$9,942 \cdot 10^6$	$1,220 \cdot 10^8$	1127,44	-	-
S_{33}	$3,205 \cdot 10^8$	$3,221 \cdot 10^8$	0,53	$3,221 \cdot 10^8$	0,53
S_{44}	$6,282 \cdot 10^5$	$6,309 \cdot 10^5$	0,44	$6,308 \cdot 10^5$	0,42
S_{55}	$3,104 \cdot 10^7$	$3,134 \cdot 10^7$	0,97	$3,134 \cdot 10^7$	0,97
S_{66}	$7,192 \cdot 10^5$	$7,147 \cdot 10^5$	-0,63	$7,147 \cdot 10^5$	-0,63
S_{12}	$-2,279 \cdot 10^5$	0,000	-100,00	-	-
S_{16}	$1,736 \cdot 10^5$	0,000	-100,00	-	-
S_{26}	$9,696 \cdot 10^4$	0,000	-100,00	-	-
S_{34}	$-3,748 \cdot 10^6$	$-3,776 \cdot 10^6$	0,76	$-3,776 \cdot 10^6$	0,76
S_{35}	$-4,300 \cdot 10^7$	$-4,323 \cdot 10^7$	0,53	$-4,323 \cdot 10^7$	0,53
S_{45}	$6,137 \cdot 10^5$	$6,192 \cdot 10^5$	0,90	$6,192 \cdot 10^5$	0,90
η_{12}	$-7,640 \cdot 10^{-3}$	0,000	-100,00	-	-
η_{16}	$2,164 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-
η_{26}	$3,626 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-
η_{34}	$-2,641 \cdot 10^{-1}$	$-2,649 \cdot 10^{-1}$	0,28	$-2,649 \cdot 10^{-1}$	0,29
η_{35}	$-4,312 \cdot 10^{-1}$	$-4,302 \cdot 10^{-1}$	-0,21	$-4,302 \cdot 10^{-1}$	-0,21
η_{45}	$1,390 \cdot 10^{-1}$	$1,393 \cdot 10^{-1}$	0,20	$1,393 \cdot 10^{-1}$	0,21

F. Vergleich anhand von Querschnitten aus Faserverbund-Material

Tabelle F.12.: Testfall 200

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend (Schuermann)		PreDoCS bestehend (Song)	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
x_{SMP} [m]	0,000	-0,002	-0,22	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{SMP} [m]	0,000	-0,001	-0,10	0,000	0,00	0,000	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,823	-	-	-	-	-
K_y [-]	-	0,462	-	-	-	-	-
S_{11}	$5,755 \cdot 10^7$	$6,994 \cdot 10^7$	21,53	-	-	-	-
S_{22}	$2,090 \cdot 10^7$	$4,527 \cdot 10^7$	116,59	-	-	-	-
S_{33}	$2,528 \cdot 10^8$	$2,539 \cdot 10^8$	0,41	$2,539 \cdot 10^8$	0,41	$2,539 \cdot 10^8$	0,41
S_{44}	$1,218 \cdot 10^7$	$1,225 \cdot 10^7$	0,52	$1,225 \cdot 10^7$	0,52	$1,225 \cdot 10^7$	0,52
S_{55}	$3,491 \cdot 10^7$	$3,517 \cdot 10^7$	0,73	$3,516 \cdot 10^7$	0,73	$3,516 \cdot 10^7$	0,73
S_{66}	$1,038 \cdot 10^7$	$1,038 \cdot 10^7$	0,03	$1,038 \cdot 10^7$	0,03	$1,038 \cdot 10^7$	0,03

Tabelle F.13.: Testfall 201

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend (Schuermann)		PreDoCS bestehend (Song)	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
x_{SMP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{SMP} [m]	0,000	-0,001	-0,13	0,000	0,00	0,000	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,785	-	-	-	-	-
K_y [-]	-	0,638	-	-	-	-	-
S_{11}	$5,757 \cdot 10^7$	$7,338 \cdot 10^7$	27,46	-	-	-	-
S_{22}	$3,897 \cdot 10^7$	$6,104 \cdot 10^7$	56,64	-	-	-	-
S_{33}	$2,950 \cdot 10^8$	$2,962 \cdot 10^8$	0,41	$2,962 \cdot 10^8$	0,41	$2,962 \cdot 10^8$	0,41
S_{44}	$1,305 \cdot 10^7$	$1,313 \cdot 10^7$	0,58	$1,313 \cdot 10^7$	0,58	$1,313 \cdot 10^7$	0,58
S_{55}	$3,491 \cdot 10^7$	$3,517 \cdot 10^7$	0,73	$3,516 \cdot 10^7$	0,73	$3,516 \cdot 10^7$	0,73
S_{66}	$1,038 \cdot 10^7$	$1,039 \cdot 10^7$	0,05	$1,039 \cdot 10^7$	0,05	$1,039 \cdot 10^7$	0,05
S_{26}	$3,804 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{26}	$1,891 \cdot 10^{-4}$	0,000	-100,00	-	-	-	-

Tabelle F.14.: Testfall 202

		BECAS		PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend (Schuermann)		PreDoCS bestehend (Song)	
				Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,038	0,038	0,00	0,038	0,00	0,038	0,00	0,038	0,00
y_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
x_{SMP} [m]	0,012	0,011	-0,06	0,013	0,04	0,013	0,04	0,013	0,04
y_{SMP} [m]	0,000	-0,001	-0,11	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,775	-	-	-	-	-	-	-
K_y [-]	-	0,595	-	-	-	-	-	-	-
S_{11}	$5,687 \cdot 10^7$	$7,338 \cdot 10^7$	29,02	-	-	-	-	-	-
S_{22}	$3,631 \cdot 10^7$	$6,104 \cdot 10^7$	68,14	-	-	-	-	-	-
S_{33}	$2,950 \cdot 10^8$	$2,962 \cdot 10^8$	0,41	$2,962 \cdot 10^8$	0,41	$2,962 \cdot 10^8$	0,41	$2,962 \cdot 10^8$	0,41
S_{44}	$1,305 \cdot 10^7$	$1,313 \cdot 10^7$	0,58	$1,313 \cdot 10^7$	0,58	$1,313 \cdot 10^7$	0,58	$1,313 \cdot 10^7$	0,58
S_{55}	$3,678 \cdot 10^7$	$3,705 \cdot 10^7$	0,72	$3,705 \cdot 10^7$	0,72	$3,705 \cdot 10^7$	0,72	$3,705 \cdot 10^7$	0,72
S_{66}	$1,050 \cdot 10^7$	$1,050 \cdot 10^7$	0,00	$1,050 \cdot 10^7$	0,00	$1,050 \cdot 10^7$	0,00	$1,050 \cdot 10^7$	0,00
S_{26}	$4,395 \cdot 10^5$	0,000	-100,00	-	-	-	-	-	-
S_{35}	$-1,124 \cdot 10^7$	$-1,128 \cdot 10^7$	0,38	$-1,128 \cdot 10^7$	0,38	$-1,128 \cdot 10^7$	0,38	$-1,128 \cdot 10^7$	0,38
η_{26}	$2,251 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-	-	-	-	-
η_{35}	$-1,079 \cdot 10^{-1}$	$-1,077 \cdot 10^{-1}$	-0,18	$-1,077 \cdot 10^{-1}$	-0,18	$-1,077 \cdot 10^{-1}$	-0,18	$-1,077 \cdot 10^{-1}$	-0,18

Tabelle F.15.: Testfall 203

		BECAS		PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend (Schuermann)		PreDoCS bestehend (Song)	
				Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
x_{SMP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{SMP} [m]	0,000	-0,001	-0,12	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,729	-	-	-	-	-	-	-
K_y [-]	-	0,715	-	-	-	-	-	-	-
S_{11}	$5,600 \cdot 10^7$	$7,681 \cdot 10^7$	37,16	-	-	-	-	-	-
S_{22}	$5,495 \cdot 10^7$	$7,681 \cdot 10^7$	39,79	-	-	-	-	-	-
S_{33}	$3,371 \cdot 10^8$	$3,385 \cdot 10^8$	0,42	$3,385 \cdot 10^8$	0,42	$3,385 \cdot 10^8$	0,42	$3,385 \cdot 10^8$	0,42
S_{44}	$1,392 \cdot 10^7$	$1,401 \cdot 10^7$	0,63	$1,401 \cdot 10^7$	0,63	$1,401 \cdot 10^7$	0,63	$1,401 \cdot 10^7$	0,63
S_{55}	$3,828 \cdot 10^7$	$3,855 \cdot 10^7$	0,71	$3,855 \cdot 10^7$	0,71	$3,855 \cdot 10^7$	0,71	$3,855 \cdot 10^7$	0,71
S_{66}	$1,074 \cdot 10^7$	$1,074 \cdot 10^7$	0,04	$1,074 \cdot 10^7$	0,04	$1,074 \cdot 10^7$	0,04	$1,074 \cdot 10^7$	0,04
S_{23}	$1,198 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	-	-	-	-	-	-
S_{26}	$8,210 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	-	-	-	-	-	-
S_{35}	$-1,059 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	0,000	-100,00	0,000	-100,00	0,000	-100,00
η_{23}	$8,804 \cdot 10^{-6}$	0,000	-100,00	-	-	-	-	-	-
η_{26}	$3,380 \cdot 10^{-4}$	0,000	-100,00	-	-	-	-	-	-
η_{35}	$-9,322 \cdot 10^{-6}$	0,000	-100,00	0,000	-100,00	0,000	-100,00	0,000	-100,00

Tabelle F.16.: Testfall 204

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend (Schuermann)		PreDoCS bestehend (Song)	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,163	0,163	0,00	0,163	0,00	0,163	0,00
y_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
x_{SMP} [m]	0,012	0,028	1,57	0,011	-0,13	0,011	-0,13
y_{SMP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,830	-	-	-	-	-
K_y [-]	-	0,181	-	-	-	-	-
S_{11}	$5,274 \cdot 10^7$	$6,351 \cdot 10^7$	20,41	-	-	-	-
S_{22}	$3,500 \cdot 10^6$	$1,933 \cdot 10^7$	452,24	-	-	-	-
S_{33}	$1,816 \cdot 10^8$	$1,825 \cdot 10^8$	0,50	$1,825 \cdot 10^8$	0,50	$1,825 \cdot 10^8$	0,50
S_{44}	$3,308 \cdot 10^5$	$3,317 \cdot 10^5$	0,26	$3,316 \cdot 10^5$	0,26	$3,316 \cdot 10^5$	0,26
S_{55}	$1,957 \cdot 10^7$	$1,977 \cdot 10^7$	1,00	$1,977 \cdot 10^7$	1,00	$1,977 \cdot 10^7$	1,00
S_{66}	$4,059 \cdot 10^5$	$4,044 \cdot 10^5$	-0,37	$4,044 \cdot 10^5$	-0,37	$4,044 \cdot 10^5$	-0,37
S_{26}	$4,155 \cdot 10^4$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{35}	$-2,963 \cdot 10^7$	$-2,979 \cdot 10^7$	0,53	$-2,979 \cdot 10^7$	0,53	$-2,979 \cdot 10^7$	0,53
η_{26}	$3,486 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{35}	$-4,969 \cdot 10^{-1}$	$-4,959 \cdot 10^{-1}$	-0,22	$-4,959 \cdot 10^{-1}$	-0,22	$-4,959 \cdot 10^{-1}$	-0,22

Tabelle F.17.: Testfall 205

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend (Schuermann)		PreDoCS bestehend (Song)	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,161	0,161	0,00	0,161	0,00	0,161	0,00
y_{ESP} [m]	-0,012	-0,012	0,00	-0,012	0,00	-0,012	0,00
x_{SMP} [m]	0,012	0,027	1,53	0,010	-0,12	0,010	-0,12
y_{SMP} [m]	-0,002	-0,002	0,00	-0,002	0,00	-0,002	0,00
HAW [°]	-0,2	89,7	-	89,7	-	89,7	-
K_x [-]	-	0,831	-	-	-	-	-
K_y [-]	-	0,184	-	-	-	-	-
S_{11}	$5,273 \cdot 10^7$	$6,349 \cdot 10^7$	20,39	-	-	-	-
S_{22}	$3,578 \cdot 10^6$	$1,943 \cdot 10^7$	443,14	-	-	-	-
S_{33}	$1,818 \cdot 10^8$	$1,827 \cdot 10^8$	0,50	$1,827 \cdot 10^8$	0,50	$1,827 \cdot 10^8$	0,50
S_{44}	$3,636 \cdot 10^5$	$3,648 \cdot 10^5$	0,35	$3,648 \cdot 10^5$	0,34	$3,648 \cdot 10^5$	0,34
S_{55}	$1,949 \cdot 10^7$	$1,968 \cdot 10^7$	1,00	$1,968 \cdot 10^7$	1,00	$1,968 \cdot 10^7$	1,00
S_{66}	$4,064 \cdot 10^5$	$4,047 \cdot 10^5$	-0,41	$4,047 \cdot 10^5$	-0,41	$4,047 \cdot 10^5$	-0,41
S_{12}	$-1,643 \cdot 10^5$	$-1,439 \cdot 10^5$	-12,44	-	-	-	-
S_{16}	$9,877 \cdot 10^4$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{26}	$4,084 \cdot 10^4$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{34}	$-2,174 \cdot 10^6$	$-2,191 \cdot 10^6$	0,79	$-2,191 \cdot 10^6$	0,79	$-2,191 \cdot 10^6$	0,79
S_{35}	$-2,929 \cdot 10^7$	$-2,944 \cdot 10^7$	0,53	$-2,944 \cdot 10^7$	0,53	$-2,944 \cdot 10^7$	0,53
S_{45}	$4,131 \cdot 10^5$	$4,169 \cdot 10^5$	0,93	$4,169 \cdot 10^5$	0,93	$4,169 \cdot 10^5$	0,93
η_{12}	$-1,196 \cdot 10^{-2}$	$-4,096 \cdot 10^{-3}$	-65,76	-	-	-	-
η_{16}	$2,134 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{26}	$3,387 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{34}	$-2,674 \cdot 10^{-1}$	$-2,683 \cdot 10^{-1}$	0,36	$-2,684 \cdot 10^{-1}$	0,36	$-2,684 \cdot 10^{-1}$	0,36
η_{35}	$-4,920 \cdot 10^{-1}$	$-4,910 \cdot 10^{-1}$	-0,22	$-4,910 \cdot 10^{-1}$	-0,22	$-4,910 \cdot 10^{-1}$	-0,22
η_{45}	$1,552 \cdot 10^{-1}$	$1,556 \cdot 10^{-1}$	0,25	$1,556 \cdot 10^{-1}$	0,25	$1,556 \cdot 10^{-1}$	0,25

Tabelle F.18.: Testfall 206

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend (Schuermann)		PreDoCS bestehend (Song)	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,134	0,134	0,00	0,134	0,00	0,134	0,00
y_{ESP} [m]	-0,012	-0,012	0,00	-0,012	0,00	-0,012	0,00
x_{SMP} [m]	0,009	0,023	1,44	0,008	-0,12	0,008	-0,12
y_{SMP} [m]	-0,002	-0,002	0,00	-0,002	0,00	-0,002	0,00
HAW [°]	-0,3	89,7	-	89,7	-	89,7	-
K_x [-]	-	0,816	-	-	-	-	-
K_y [-]	-	0,268	-	-	-	-	-
S_{11}	$5,239 \cdot 10^7$	$6,424 \cdot 10^7$	22,62	-	-	-	-
S_{22}	$6,124 \cdot 10^6$	$2,289 \cdot 10^7$	273,78	-	-	-	-
S_{33}	$1,909 \cdot 10^8$	$1,920 \cdot 10^8$	0,58	$1,920 \cdot 10^8$	0,58	$1,920 \cdot 10^8$	0,58
S_{44}	$3,727 \cdot 10^5$	$3,745 \cdot 10^5$	0,50	$3,745 \cdot 10^5$	0,49	$3,745 \cdot 10^5$	0,49
S_{55}	$1,848 \cdot 10^7$	$1,867 \cdot 10^7$	1,04	$1,867 \cdot 10^7$	1,04	$1,867 \cdot 10^7$	1,04
S_{66}	$4,186 \cdot 10^5$	$4,170 \cdot 10^5$	-0,38	$4,170 \cdot 10^5$	-0,38	$4,170 \cdot 10^5$	-0,38
S_{12}	$-1,294 \cdot 10^5$	$-1,439 \cdot 10^5$	11,17	-	-	-	-
S_{16}	$1,016 \cdot 10^5$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{23}	$1,217 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{26}	$5,441 \cdot 10^4$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{34}	$-2,232 \cdot 10^6$	$-2,250 \cdot 10^6$	0,83	$-2,250 \cdot 10^6$	0,83	$-2,250 \cdot 10^6$	0,83
S_{35}	$-2,562 \cdot 10^7$	$-2,576 \cdot 10^7$	0,57	$-2,576 \cdot 10^7$	0,57	$-2,576 \cdot 10^7$	0,57
S_{45}	$3,655 \cdot 10^5$	$3,690 \cdot 10^5$	0,96	$3,690 \cdot 10^5$	0,96	$3,690 \cdot 10^5$	0,96
η_{12}	$-7,226 \cdot 10^{-3}$	$-3,752 \cdot 10^{-3}$	-48,07	-	-	-	-
η_{16}	$2,169 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{23}	$3,560 \cdot 10^{-5}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{26}	$3,398 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{34}	$-2,646 \cdot 10^{-1}$	$-2,654 \cdot 10^{-1}$	0,29	$-2,654 \cdot 10^{-1}$	0,29	$-2,654 \cdot 10^{-1}$	0,29
η_{35}	$-4,313 \cdot 10^{-1}$	$-4,303 \cdot 10^{-1}$	-0,24	$-4,303 \cdot 10^{-1}$	-0,24	$-4,303 \cdot 10^{-1}$	-0,24
η_{45}	$1,393 \cdot 10^{-1}$	$1,395 \cdot 10^{-1}$	0,19	$1,395 \cdot 10^{-1}$	0,19	$1,395 \cdot 10^{-1}$	0,19

Tabelle F.19.: Testfall 210

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend (Schuermann)		PreDoCS bestehend (Song)	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
x_{SMP} [m]	0,000	-0,002	-0,22	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{SMP} [m]	0,000	-0,001	-0,10	0,000	0,00	0,000	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,840	-	-	-	-	-
K_y [-]	-	0,494	-	-	-	-	-
S_{11}	$7,649 \cdot 10^7$	$9,102 \cdot 10^7$	18,99	-	-	-	-
S_{22}	$2,777 \cdot 10^7$	$5,626 \cdot 10^7$	102,60	-	-	-	-
S_{33}	$2,438 \cdot 10^8$	$2,448 \cdot 10^8$	0,41	$2,447 \cdot 10^8$	0,36	$2,448 \cdot 10^8$	0,41
S_{44}	$1,175 \cdot 10^7$	$1,181 \cdot 10^7$	0,52	$1,180 \cdot 10^7$	0,48	$1,181 \cdot 10^7$	0,52
S_{55}	$3,366 \cdot 10^7$	$3,391 \cdot 10^7$	0,73	$3,389 \cdot 10^7$	0,68	$3,391 \cdot 10^7$	0,73
S_{66}	$1,379 \cdot 10^7$	$1,380 \cdot 10^7$	0,08	$1,380 \cdot 10^7$	0,03	$1,380 \cdot 10^7$	0,08
S_{14}	$-6,230 \cdot 10^5$	$-6,211 \cdot 10^5$	-0,30	-	-	-	-
S_{25}	$-6,484 \cdot 10^5$	$-6,224 \cdot 10^5$	-4,00	-	-	-	-
S_{36}	$1,235 \cdot 10^6$	$1,240 \cdot 10^6$	0,37	-	-	-	-
η_{14}	$-2,078 \cdot 10^{-2}$	$-1,894 \cdot 10^{-2}$	-8,84	-	-	-	-
η_{25}	$-2,121 \cdot 10^{-2}$	$-1,425 \cdot 10^{-2}$	-32,80	-	-	-	-
η_{36}	$2,130 \cdot 10^{-2}$	$2,133 \cdot 10^{-2}$	0,13	-	-	-	-

Tabelle F.20.: Testfall 211

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend (Schuermann)		PreDoCS bestehend (Song)	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{ESP} [m]	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00
x_{SMP} [m]	0,000	-0,002	-0,22	0,000	0,00	0,000	0,00
y_{SMP} [m]	0,000	-0,001	-0,10	0,000	0,00	0,000	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,840	-	-	-	-	-
K_y [-]	-	0,494	-	-	-	-	-
S_{11}	$7,650 \cdot 10^7$	$9,102 \cdot 10^7$	18,99	-	-	-	-
S_{22}	$2,778 \cdot 10^7$	$5,626 \cdot 10^7$	102,57	-	-	-	-
S_{33}	$2,438 \cdot 10^8$	$2,448 \cdot 10^8$	0,42	$2,447 \cdot 10^8$	0,37	$2,448 \cdot 10^8$	0,42
S_{44}	$1,175 \cdot 10^7$	$1,181 \cdot 10^7$	0,55	$1,180 \cdot 10^7$	0,50	$1,181 \cdot 10^7$	0,54
S_{55}	$3,365 \cdot 10^7$	$3,391 \cdot 10^7$	0,77	$3,389 \cdot 10^7$	0,73	$3,391 \cdot 10^7$	0,77
S_{66}	$1,379 \cdot 10^7$	$1,380 \cdot 10^7$	0,06	$1,380 \cdot 10^7$	0,02	$1,380 \cdot 10^7$	0,06
S_{12}	$-3,698 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{13}	$2,276 \cdot 10^6$	$2,495 \cdot 10^6$	9,61	-	-	-	-
S_{16}	$-1,684 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{23}	$8,267 \cdot 10^5$	$1,248 \cdot 10^6$	50,92	-	-	-	-
S_{26}	$-1,658 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{45}	$4,077 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	0,000	-100,00	0,000	-100,00
S_{46}	$-2,053 \cdot 10^5$	$-2,057 \cdot 10^5$	0,21	-	-	-	-
S_{56}	$-2,053 \cdot 10^5$	$-2,062 \cdot 10^5$	0,43	-	-	-	-
η_{12}	$-8,023 \cdot 10^{-5}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{13}	$1,667 \cdot 10^{-2}$	$1,672 \cdot 10^{-2}$	0,28	-	-	-	-
η_{16}	$-5,185 \cdot 10^{-5}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{23}	$1,005 \cdot 10^{-2}$	$1,063 \cdot 10^{-2}$	5,82	-	-	-	-
η_{26}	$-8,471 \cdot 10^{-5}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{45}	$2,051 \cdot 10^{-4}$	0,000	-100,00	0,000	-100,00	0,000	-100,00
η_{46}	$-1,613 \cdot 10^{-2}$	$-1,611 \cdot 10^{-2}$	-0,09	-	-	-	-
η_{56}	$-9,530 \cdot 10^{-3}$	$-9,531 \cdot 10^{-3}$	0,01	-	-	-	-

Tabelle F.21.: Testfall 220

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend (Schuermann)		PreDoCS bestehend (Song)	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,139	0,139	-0,01	0,139	-0,01	0,139	-0,01
y_{ESP} [m]	-0,012	-0,012	0,00	-0,012	0,00	-0,012	0,00
x_{SMP} [m]	0,020	0,034	1,47	0,019	-0,10	0,019	-0,10
y_{SMP} [m]	-0,002	-0,002	0,00	-0,002	0,00	-0,002	0,00
HAW [°]	-0,3	89,7	-	89,7	-	89,7	-
K_x [-]	-	0,798	-	-	-	-	-
K_y [-]	-	0,275	-	-	-	-	-
S_{11}	$5,194 \cdot 10^7$	$6,506 \cdot 10^7$	25,27	-	-	-	-
S_{22}	$7,326 \cdot 10^6$	$2,667 \cdot 10^7$	263,98	-	-	-	-
S_{33}	$2,008 \cdot 10^8$	$2,021 \cdot 10^8$	0,64	$2,021 \cdot 10^8$	0,64	$2,021 \cdot 10^8$	0,64
S_{44}	$3,848 \cdot 10^5$	$3,874 \cdot 10^5$	0,65	$3,873 \cdot 10^5$	0,65	$3,873 \cdot 10^5$	0,65
S_{55}	$1,926 \cdot 10^7$	$1,946 \cdot 10^7$	1,02	$1,946 \cdot 10^7$	1,02	$1,946 \cdot 10^7$	1,02
S_{66}	$4,215 \cdot 10^5$	$4,172 \cdot 10^5$	-1,02	$4,172 \cdot 10^5$	-1,02	$4,172 \cdot 10^5$	-1,02
S_{12}	$-7,246 \cdot 10^4$	$-1,439 \cdot 10^5$	98,58	-	-	-	-
S_{16}	$1,026 \cdot 10^5$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{23}	$1,330 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{26}	$1,437 \cdot 10^5$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{34}	$-2,310 \cdot 10^6$	$-2,330 \cdot 10^6$	0,86	$-2,330 \cdot 10^6$	0,86	$-2,330 \cdot 10^6$	0,86
S_{35}	$-2,799 \cdot 10^7$	$-2,814 \cdot 10^7$	0,55	$-2,814 \cdot 10^7$	0,55	$-2,814 \cdot 10^7$	0,55
S_{45}	$3,961 \cdot 10^5$	$3,998 \cdot 10^5$	0,94	$3,998 \cdot 10^5$	0,94	$3,998 \cdot 10^5$	0,94
η_{12}	$-3,714 \cdot 10^{-3}$	$-3,454 \cdot 10^{-3}$	-7,00	-	-	-	-
η_{16}	$2,192 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{23}	$3,467 \cdot 10^{-5}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{26}	$8,179 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{34}	$-2,628 \cdot 10^{-1}$	$-2,634 \cdot 10^{-1}$	0,21	$-2,634 \cdot 10^{-1}$	0,21	$-2,634 \cdot 10^{-1}$	0,21
η_{35}	$-4,500 \cdot 10^{-1}$	$-4,487 \cdot 10^{-1}$	-0,28	$-4,487 \cdot 10^{-1}$	-0,28	$-4,487 \cdot 10^{-1}$	-0,28
η_{45}	$1,455 \cdot 10^{-1}$	$1,456 \cdot 10^{-1}$	0,10	$1,456 \cdot 10^{-1}$	0,10	$1,456 \cdot 10^{-1}$	0,10

Tabelle F.22.: Testfall 221

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend (Schuermann)		PreDoCS bestehend (Song)	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,107	0,107	-0,01	0,107	-0,01	0,107	-0,01
y_{ESP} [m]	-0,011	-0,011	0,00	-0,011	0,00	-0,011	0,00
x_{SMP} [m]	-0,004	0,010	1,42	-0,005	-0,08	-0,005	-0,08
y_{SMP} [m]	-0,002	-0,002	0,00	-0,002	0,00	-0,002	0,00
HAW [°]	-0,3	89,7	-	89,7	-	89,7	-
K_x [-]	-	0,790	-	-	-	-	-
K_y [-]	-	0,289	-	-	-	-	-
S_{11}	$5,198 \cdot 10^7$	$6,579 \cdot 10^7$	26,56	-	-	-	-
S_{22}	$8,674 \cdot 10^6$	$3,000 \cdot 10^7$	245,84	-	-	-	-
S_{33}	$2,096 \cdot 10^8$	$2,111 \cdot 10^8$	0,71	$2,111 \cdot 10^8$	0,71	$2,111 \cdot 10^8$	0,71
S_{44}	$3,925 \cdot 10^5$	$3,956 \cdot 10^5$	0,77	$3,955 \cdot 10^5$	0,76	$3,955 \cdot 10^5$	0,76
S_{55}	$1,777 \cdot 10^7$	$1,796 \cdot 10^7$	1,08	$1,796 \cdot 10^7$	1,08	$1,796 \cdot 10^7$	1,08
S_{66}	$4,219 \cdot 10^5$	$4,201 \cdot 10^5$	-0,44	$4,201 \cdot 10^5$	-0,44	$4,201 \cdot 10^5$	-0,44
S_{12}	$-5,736 \cdot 10^4$	$-1,439 \cdot 10^5$	150,83	-	-	-	-
S_{16}	$1,021 \cdot 10^5$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{23}	$1,182 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{26}	$-3,302 \cdot 10^4$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{34}	$-2,345 \cdot 10^6$	$-2,366 \cdot 10^6$	0,89	$-2,366 \cdot 10^6$	0,89	$-2,366 \cdot 10^6$	0,89
S_{35}	$-2,244 \cdot 10^7$	$-2,257 \cdot 10^7$	0,61	$-2,257 \cdot 10^7$	0,61	$-2,257 \cdot 10^7$	0,61
S_{45}	$3,240 \cdot 10^5$	$3,272 \cdot 10^5$	0,99	$3,272 \cdot 10^5$	0,99	$3,272 \cdot 10^5$	0,99
η_{12}	$-2,701 \cdot 10^{-3}$	$-3,239 \cdot 10^{-3}$	19,89	-	-	-	-
η_{16}	$2,179 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{23}	$2,771 \cdot 10^{-5}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{26}	$-1,726 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{34}	$-2,586 \cdot 10^{-1}$	$-2,590 \cdot 10^{-1}$	0,15	$-2,590 \cdot 10^{-1}$	0,16	$-2,590 \cdot 10^{-1}$	0,16
η_{35}	$-3,677 \cdot 10^{-1}$	$-3,666 \cdot 10^{-1}$	-0,28	$-3,666 \cdot 10^{-1}$	-0,28	$-3,666 \cdot 10^{-1}$	-0,28
η_{45}	$1,227 \cdot 10^{-1}$	$1,228 \cdot 10^{-1}$	0,06	$1,228 \cdot 10^{-1}$	0,07	$1,228 \cdot 10^{-1}$	0,07

Tabelle F.23.: Testfall 222

	BECAS	PreDoCS aktuell		PreDoCS bestehend (Schuermann)		PreDoCS bestehend (Song)	
		Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]	Wert	Abw. [%]
x_{ESP} [m]	0,112	0,111	-0,13	0,111	-0,13	0,111	-0,13
y_{ESP} [m]	-0,011	-0,011	0,00	-0,011	0,00	-0,011	0,00
x_{SMP} [m]	0,014	0,031	1,69	0,011	-0,29	0,011	-0,29
y_{SMP} [m]	-0,001	0,000	0,10	-0,001	0,00	-0,001	0,00
HAW [°]	0,0	90,0	-	90,0	-	90,0	-
K_x [-]	-	0,702	-	-	-	-	-
K_y [-]	-	0,289	-	-	-	-	-
S_{11}	$5,879 \cdot 10^7$	$8,370 \cdot 10^7$	42,37	-	-	-	-
S_{22}	$9,354 \cdot 10^6$	$3,237 \cdot 10^7$	246,05	-	-	-	-
S_{33}	$2,530 \cdot 10^8$	$2,558 \cdot 10^8$	1,10	$2,558 \cdot 10^8$	1,10	$2,558 \cdot 10^8$	1,10
S_{44}	$4,999 \cdot 10^5$	$5,051 \cdot 10^5$	1,03	$5,050 \cdot 10^5$	1,01	$5,050 \cdot 10^5$	1,01
S_{55}	$2,348 \cdot 10^7$	$2,376 \cdot 10^7$	1,19	$2,376 \cdot 10^7$	1,19	$2,376 \cdot 10^7$	1,19
S_{66}	$5,571 \cdot 10^5$	$5,538 \cdot 10^5$	-0,59	$5,538 \cdot 10^5$	-0,59	$5,538 \cdot 10^5$	-0,59
S_{12}	$6,397 \cdot 10^5$	$6,095 \cdot 10^5$	-4,72	-	-	-	-
S_{13}	$1,478 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{16}	$6,950 \cdot 10^4$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{23}	$2,271 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{25}	$-1,031 \cdot 10^3$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{26}	$1,284 \cdot 10^5$	0,000	-100,00	-	-	-	-
S_{34}	$-2,748 \cdot 10^6$	$-2,785 \cdot 10^6$	1,35	$-2,785 \cdot 10^6$	1,35	$-2,785 \cdot 10^6$	1,35
S_{35}	$-2,844 \cdot 10^7$	$-2,841 \cdot 10^7$	-0,11	$-2,841 \cdot 10^7$	-0,11	$-2,841 \cdot 10^7$	-0,11
S_{45}	$3,241 \cdot 10^5$	$3,232 \cdot 10^5$	-0,28	$3,232 \cdot 10^5$	-0,28	$3,232 \cdot 10^5$	-0,28
η_{12}	$2,728 \cdot 10^{-2}$	$1,171 \cdot 10^{-2}$	-57,07	-	-	-	-
η_{13}	$1,212 \cdot 10^{-5}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{16}	$1,214 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{23}	$4,668 \cdot 10^{-5}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{25}	$-6,960 \cdot 10^{-5}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{26}	$5,625 \cdot 10^{-2}$	0,000	-100,00	-	-	-	-
η_{34}	$-2,443 \cdot 10^{-1}$	$-2,450 \cdot 10^{-1}$	0,28	$-2,450 \cdot 10^{-1}$	0,29	$-2,450 \cdot 10^{-1}$	0,29
η_{35}	$-3,690 \cdot 10^{-1}$	$-3,644 \cdot 10^{-1}$	-1,24	$-3,644 \cdot 10^{-1}$	-1,24	$-3,644 \cdot 10^{-1}$	-1,24
η_{45}	$9,460 \cdot 10^{-2}$	$9,330 \cdot 10^{-2}$	-1,37	$9,331 \cdot 10^{-2}$	-1,37	$9,331 \cdot 10^{-2}$	-1,37

G. Variation des Faserwinkels

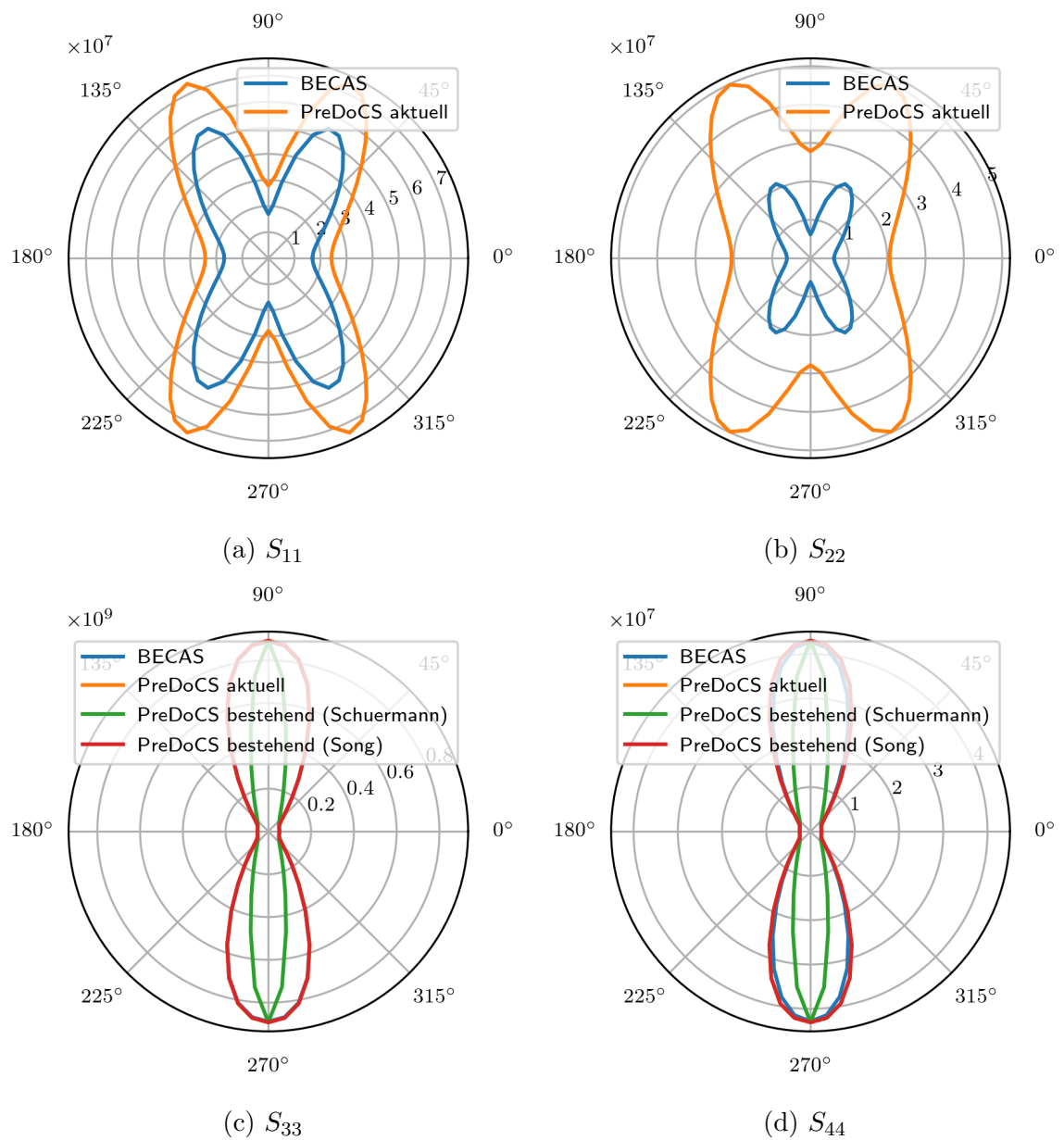


Abbildung G.1.: Steifigkeits-Koeffizienten unter Variation des Faserwinkels

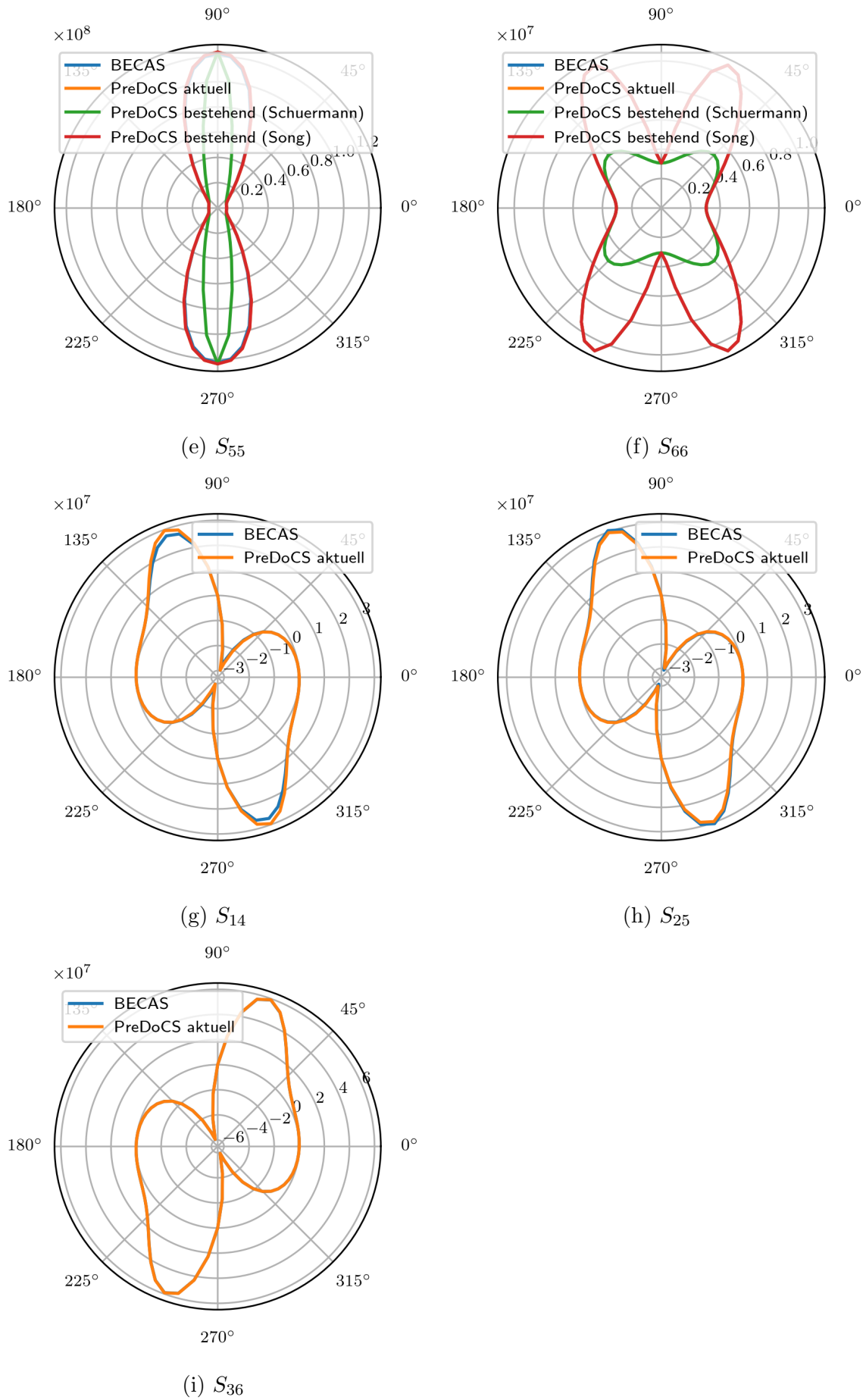


Abbildung G.1.: Steifigkeits-Koeffizienten unter Variation des Faserwinkels

H. Variation der Elementlänge

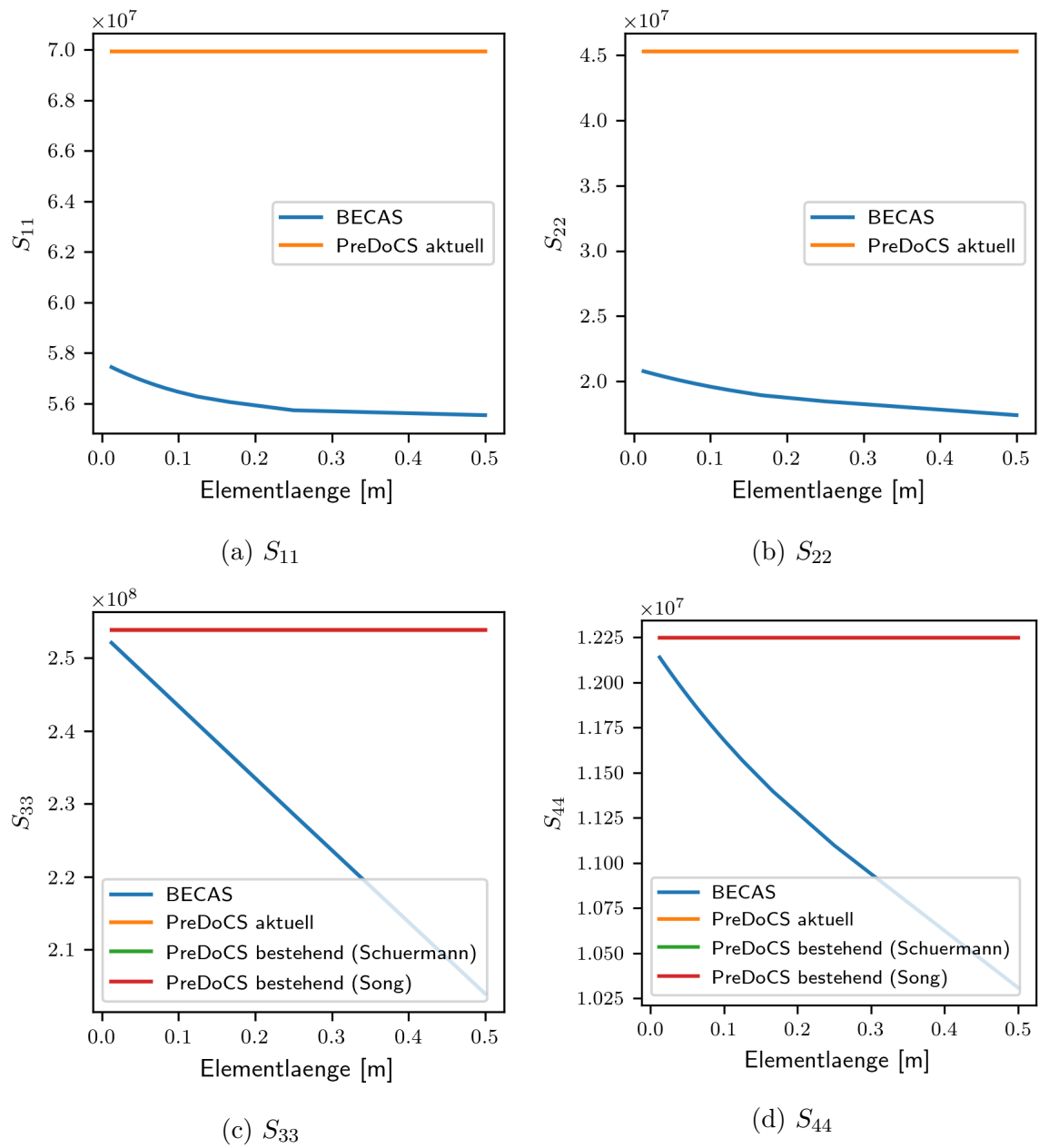


Abbildung H.2.: Steifigkeits-Koeffizienten unter Variation der Elementlänge

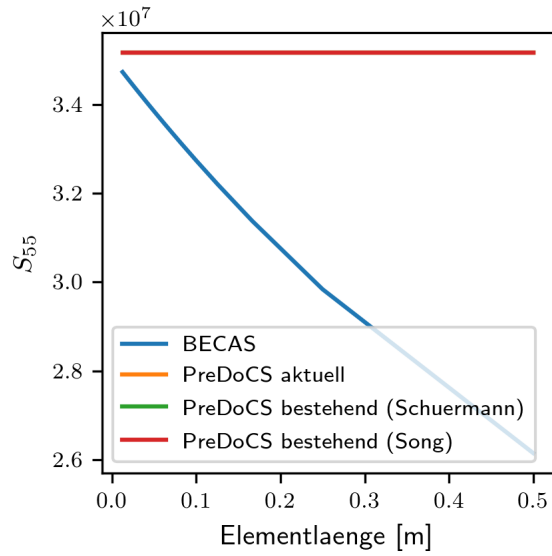
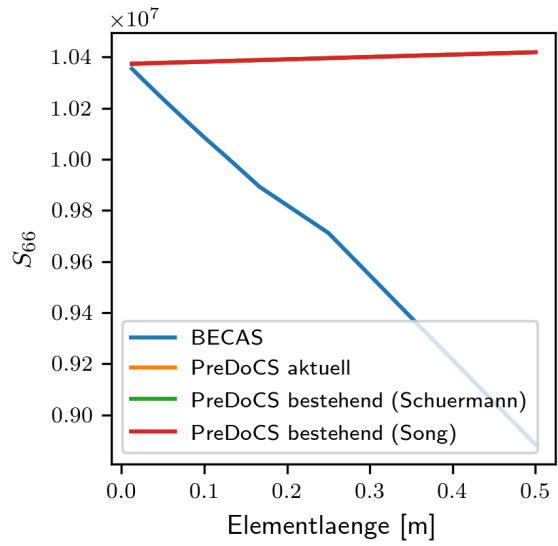
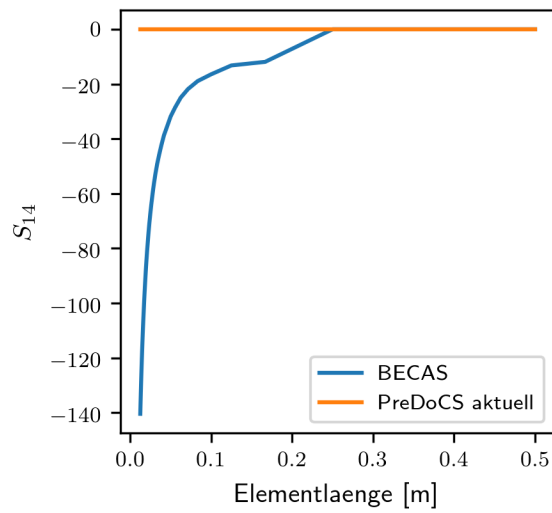
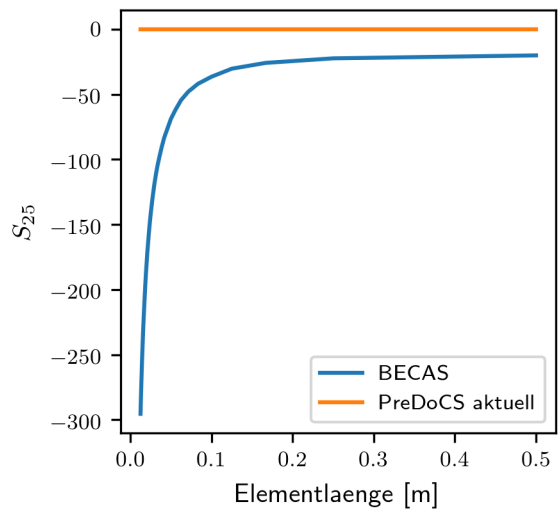
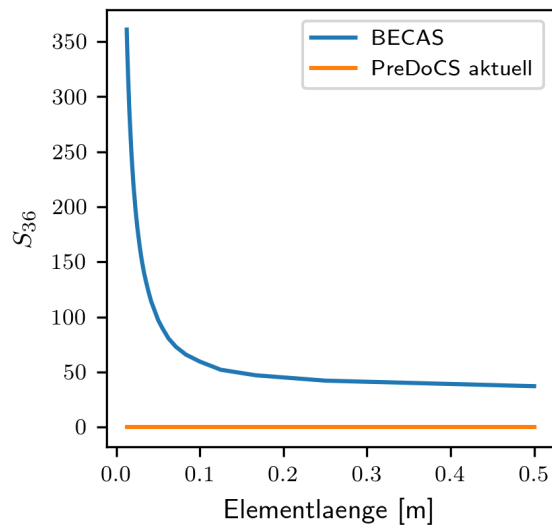
(e) S_{55} (f) S_{66} (g) S_{14} (h) S_{25} (i) S_{36}

Abbildung H.2.: Steifigkeits-Koeffizienten unter Variation der Elementlänge